10. УЗЛЫ И ПРОЧЕЕ

Задача 1. а) Пусть $S^3 \overset{\text{def}}{=} (z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1$ — трехмерная сфера. б) Решите задачу 8 листка 2, если вы не сделали этого раньше: докажите, что множества $Q_+ \overset{\text{def}}{=} \{(z,w) \in S^3 \mid |z| \geq |w|\}$ и $Q_- \overset{\text{def}}{=} \{(z,w) \in S^3 \mid |w| \geq |z|\}$ гомеоморфны полноториям $D \times S^1$ (декартово произведение круга D на окружность), а $Q \overset{\text{def}}{=} Q_+ \cap Q_-$ гомеоморфно двумерному тору $S^1 \times S^1$. в) Докажите, что дополнение к полноторию, стандартно вложенному в $\mathbb{R}^3$, гомеоморфно полноторию без одной внутренней точки. г) Докажите, что фундаментальная группа полнотория и полнотория без одной точки (внутренней или граничной) изоморфна $\mathbb{Z}$. Какая петля соответствует числу 1?

Задача 2*. n-мерным топологическим многообразием называется топологическое пространство M такое, что для всякой точки $a \in M$ существуе открытое множество $U \subset M$, $a \in U$, гомеоморфное открытому n-мерному шару. Докажите, что если M — линейно связное n-мерное топологическое многобразие, где $n \geq 3$, то $\pi_1(M \setminus \{a\}) = \pi_1(M)$.

Задача 3. а) Пусть $A \overset{\text{def}}{=} \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ — окружность. Докажите, что $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus A) = \mathbb{Z}$. б) Пусть $B \overset{\text{def}}{=} \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-2)^2 + y^2 = 1\}$ — другая окружность. Докажите, что $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B))$ — свободная группа с двумя образующими. в) Пусть $C \overset{\text{def}}{=} \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + z^2 = 1\}$ — еще одна окружность. Докажите, что $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup C)) = \mathbb{Z}^2$.

Указание. Пространство $\mathbb{R}^3$ гомеоморфно трехмерной сфере S^3 без одной точки (∞). Добавьте точку ∞ к изучаемым пространствам ($\mathbb{R}^3 \setminus A$ и т.п.) и воспользуйтесь результатами задач 1 и 2*. В задаче 3б докажите, что $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \setminus (A \cup B)$ гомотопически эквивалентно букету двух окружностей.

Задача 4. Обозначим $X_n \subset (\mathbb{R}^2)^n$ множество наборов $(a_1, \dots, a_n)$ попарно различных точек плоскости; $Y_n = X_n / S_n$, где группа S_n действует перестановками точек. а) Докажите, что X_2 и Y_2 гомотопически эквивалентны окружности. б) Докажите, что отображение факторизации $X_n \to Y_n$ является нормальным накрытием. в) Докажите, что $\pi_1(Y_n)$ (она называется группой кос из n нитей) при $n > 2$ некоммутативна.

Указание (к пункту 4б)**.** Накрытие $p : E \to B$ с линейно связными E и B называется нормальным, если подгруппа $p_*(\pi_1(E))$ в группе $\pi_1(B)$ нормальна.

Задача 5. Пусть $A \subset \mathbb{C}^2$ — множество пар комплексных чисел (p,q) таких, что многочлен вида $P(t) = t^3 + pt + q$ не имеет кратных корней. а) Докажите, что A гомотопически экввалентно пространству Y_3 из задачи 4. б) Докажите, что A гомеоморфно множеству $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid z^2 \neq w^3\}$.

Пусть $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ — двумерный тор, а $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ — универсальное накрытие. Назовем (n,k)-обмоткой тора множество $\{p(nt,kt) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{T}^2$, где $n,k \in \mathbb{Z}$. Пусть теперь $f : \mathbb{T}^2 \to Q$ — гомеоморфизм, построенный в задаче 1б, а $T \subset S^3$ — образ $(3,2)$-обмотки тора при отображении f. Тогда T называется узлом “трилистник”.

Задача 6. а) Нарисуйте узел “трилистник”. б) Докажите, что (n,k)-обмотка тора при любых n и k гомеоморфна окружности. в) Докажите, что A гомотопически эквивалентно $S^3 \setminus T$ (дополнению к узлу “трилистник”).

Как известно, $S^1 = [0,1]/(0 \sim 1)$; таким образом, отображения $f : S^1 \to X$ (где X — любое пространство) это просто отображения $f : [0,1] \to X$, для которых $f(0) = f(1)$. Это дает возможность говорить о гладком отображении $S^1 \to \mathbb{R}^3$, о производной этого отображения и т.п.

Назовем узлом гладкое отображение $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3$, для которой $\gamma'(t) \neq 0$ для всех $t \in [0,1]$ и $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ при всех $t, s \in S^1$, $t \neq s$. Изотопией узлов называется гладкое отображение $F : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ такое, что при любом $s \in [0,1]$ отображение $t \mapsto F(t,s)$ — узел.

Задача 7*. а) Пусть γ_1, γ_2 — узлы, где γ_1 — взаимно однозначное отображение S^1 на окружность A из задачи 3а, а γ_2 — взаимно однозначное отображение S^1 на узел “трилистник” из задачи 6а. Докажите, что узлы γ_1 и γ_2 не изотопны. б) Пусть γ_3, γ_4 — взаимно однозначные отображения S^1 на окружности B и C из задач 3б и 3в. Докажите, что узлы γ_3 и γ_4 не изотопны в дополнении $\mathbb{R}^3 \setminus A$.

Пусть $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ — петля, т.е. непрерывное отображение, для которого $\gamma(0) = \gamma(1)$, и пусть $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma([0,1])$. Определим отображение $\varphi_a : [0,1] \to S^1 \overset{\text{def}}{=} \{v \in \mathbb{R}^2 \mid |v| = 1\}$ формулой $\varphi_a(t) = (a - \gamma(t))/|a - \gamma(t)|$;

очевидно, это петля ($\varphi_a(0) = \varphi_a(1)$). Назовем индекс петли φ_a индексом точки a относительно петли γ и обозначим $\mathrm{ind}_\gamma(a)$.

Задача 8. Докажите, что функция $a \mapsto \mathrm{ind}_\gamma(a)$ непрерывна и, следовательно, постоянна на компонентах линейной связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma([0,1])$. а) Пусть $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ — кривая, для которой $\delta(1) - -\delta(0)$, и $\delta(t) \neq (0,0)$ при всех t. Положим по по определению $\gamma = \delta \cdot (-\delta)$, где вторая кривая задана формулой $t \mapsto -\delta(t)$. Докажите, что $\mathrm{ind}_\gamma(0)$ нечетен. б) Пусть $\lambda : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение, причем $\lambda(0) = 0$ и $\lim_{t\to+\infty} |\lambda(t)| = \infty$. Докажите, что $\lambda(t) \in \gamma([0,1])$ для некоторого $t > 0$. в) Пусть $\delta : [0,1] \to S^2$ — непрерывная кривая, для которой $\delta(0) = -\delta(1)$, и пусть $\gamma = \delta \cdot (-\delta)$, как в задаче 8б. Пусть $\xi : [0,1] \to S^2$ — непрерывная кривая, для которой $\xi(1) = -\xi(0)$. Докажите, что $\xi([0,1]) \cap \gamma([0,1]) \neq \varnothing$.