9. НАКРЫТИЯ

Пусть $C = S^1 \times [0,1]$ — цилиндр, $\mathcal{M}$ — лента Мебиуса, S^2 — двумерная сфера, $\mathbb{R}P^2$ — проективная плоскость, $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ — двумерный тор, K — бутылка Клейна. Рассмотрим отображение $p : C \to \mathcal{M}$, описанное в задаче 1б листка 8, $q : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ — отображение склейки, описанное в задаче 6в листка 2, и $h : \mathbb{T}^2 \to K$, описанное в задаче 4в листка 8.

Задача 1. а) Докажите, что p, q, h — двулистные накрытия. б) Опишите множества $p^{-1}(U) \subset C$, $q^{-1}(V) \subset S^2$, $h^{-1}(W_1), h^{-1}(W_2) \subset \mathbb{T}^2$, где $U \subset \mathcal{M}$ — открытая полоска вдоль средней линии ленты Мебиуса, $V \subset \mathbb{R}P^2$ — окрестность проективной прямой, а $W_1, W_2 \subset K$ — открытые полоски вдоль горизонтальной и вертикальной средней линии бутылки Клейна. в) Решите задачу 1в листка 8, если вы не сделали этого ранее, и проверьте, что результат соответствует теореме об отображени фундаментальных групп при накрытии. г) Найдите группу $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$. д) Докажите, что группа $\pi_1(K)$ порождена двумя образующими a и b, связанными единственным соотношением $abab^{-1} = 1$. е) Опишите подгруппу (индекса 2) $p_*(\pi_1(\mathbb{T}^2)) \subset \pi_1(K)$.

Указание (к пункту 1г)**.** См. задачу 3б листка 7.

Задача 2. а) Разберитесь с определением графа из листка 6 и решите задачу 5а из того же листка, если вы не сделали этого раньше. б) Пусть Γ — конечный граф, и e — ребро, не являющееся петлей. Докажите, что Γ/e (фактор-пространство, в котором все ребро e стянуто в точку, а остальные точки Γ не изменились) — конечный граф, гомотопически эквивалентный Γ.

Пусть W_k — множество всех конечных последовательностей (“слов”) из символов $a_1, \dots, a_k$ и $a_1^{-1}, \dots, a_k^{-1}$; также в W_k по определению входит пустое слово. Два слова $w_1, w_2 \in W_k$ называются эквивалентными, если они получаются друг из друга конечным набором вписываний и вычеркиваний фрагментов $a_i a_i^{-1}$ и $a_i^{-1} a_i$ (для произвольных $i = 1, \dots, k$ и в любом порядке).

Задача 3. Докажите, что это действительно отношение эквивалентности.

Пусть $\mathcal{F}_k$ — множество классов эквивалентности в W_k по введенному отношению. Пусть $p, q \in \mathcal{F}_k$, и $u \in p, v \in q$ — произвольные представители классов. Назовем произведением классов p и q класс, которому принадлежит слово uv (последовательность u, к которой справа приписана последовательность v).

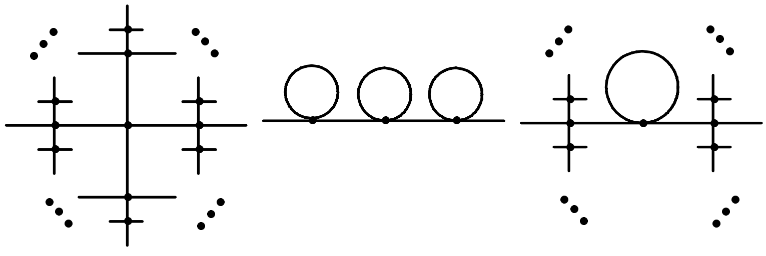
Задача 4. а) Докажите, что определение произведения в $\mathcal{F}_k$ корректно, т.е. не зависит от выбора представителей u, v классов p, q. б) Докажите, что $\mathcal{F}_k$ относительно введенной операции является группой. в) Докажите, что эта группа при $k > 1$ некоммутативна. Что происходит при $k = 1$?

Группа $\mathcal{F}_k$ называется свободной группой с k образующими.

Задача 5. а) Решите задачу 5б листка 6, если вы не сделали этого раньше. Рисунок в листке 6 совпадает с рис. 1a в этом листке. б) Постройте накрытие $p_a : \Gamma_a \to S^1 \vee S^1$ над букетом из двух окружностей. Докажите, используя результат задачи 5а, что $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ — свободная группа $\mathcal{F}_2$ с двумя образующими.

Определение нормальной подгруппы и основные свойства нормальных подгрупп см. в лекции 9.

Задача 6. а) Постройте накрытия $p_b : \Gamma_b \to S^1 \vee S^1$ и $p_c : \Gamma_c \to S^1 \vee S^1$, где графы Γ_b и Γ_c изображены на рис. 1b и 1c соответственно. б) Вычислите подгруппу $(p_b)_*(\pi_1(\Gamma_b)) \subset \mathcal{F}_2$. Нормальна ли эта подгруппа? Опишите $\pi_1(\Gamma_b)$ как группу. в) Те же вопросы про граф Γ_c.



a b c

Рис. 1. Накрытия над букетом двух окружностей

Задача 7. Пусть $p : E \to B$ — накрытие, причем пространства B и E линейно связны, и пусть $b \in B$ — отмеченная точка. Докажите, что подгруппа $p_*(\pi_1(E)) \subset \pi_1(B)$ не является нормальной тогда и только тогда, когда существует петля в B с началом в точке b, которая является одновременно образом петли и образом незамкнутого пути в E. Укажите такую петлю для накрытия букета двух окружностей графом, изображенным на рис. 1с.

Задача 8. а) Топологическое пространство Γ является связным n-листным накрытием букета из k окружностей. Докажите, что Γ гомеоморфно конечному графу, и найдите число вершин и ребер этого графа. б) Докажите, используя задачу 2б, что любой связный конечный граф гомотопически эквивалентен букету окружностей. Как связано число окружностей в букете с числом вершин и ребер графа? в) Используя результаты задач 8а и 8б, докажите, что если группа G является подгруппой свободной группы $\mathcal{F}_k$ с k образующими, и индекс $|\mathcal{F}_k : G| = n$ конечен, то G изоморфна свободной группе F_p. Выразите число p через n и k. Продумайте возможность чисто алгебраического доказательства этого утверждения.

Монодромией накрытия $p : E \to B$ называется отображение μ группы $\pi_1(B, b)$ ($b \in B$ — отмеченная точка) в группу взаимно однозначных отображений слоя F в себя, заданное следующим образом: пусть элемент $x \in \pi_1(B, b)$ представлен петлей $\gamma : [0, 1] \to B$. Тогда для каждого $y \in p^{-1}(b) = F$ рассмотрим поднятие $\Gamma : [0, 1] \to E$ петли γ такое, что $\Gamma(0) = y$ (Γ существует и единственно по теореме о накрывающей гомотопии). Тогда положим по определению $\mu(\gamma)(y) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(1)$.

Задача 9. а) Докажите, что $\mu(\gamma)$ — действительно взаимно однозначное отображение слоя $p^{-1}(b)$ в себя. Докажите также, что оно не зависит от выбора петли γ, представляющей класс x. б) Вычислите монодромию накрытий p, q и h, описанных в задаче 1 в) Вычислите монодромию накрытий, построенных в задаче 6.

Пусть $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — многочлен. Число $c \in \mathbb{C}$ называется регулярным значением P, если $P'(z) \neq 0$ для всех z таких, что $P(z) = c$. Обозначим $U \subset \mathbb{C}$ множество регулярных значений P, и пусть $V \stackrel{\text{def}}{=} \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w = P(z) \in U\}$.

Задача 10. а) Докажите, что отображение $f : V \to U$, заданное формулой $f(z, w) = w$, — накрытие, число листов которого равно степени многочлена P. Вычислите монодромию этого накрытия б) при $P(z) = z^n$, в) при $P(z) = z^5 - 5z - 1$.