8. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА И ОТОБРАЖЕНИЯ

Задача 1 (ср. задачу 1 листка 6). а) Цилиндр C — квадрат $[0,1]^2$, в котором склеены точки $(0,y) \sim (1,y)$ для всех $0 \le y \le 1$. Докажите, что C гомеоморфен $[0,1] \times S^1$ и гомотопически эквивалентен S^1. б) Напомним, что лентой Мебиуса $\mathcal{M}$ называется квадрат $[0,1]^2$, в котором склеены точки $(0,y) \sim (1,1-y)$ для всех $0 \le y \le 1$. Докажите, что $\mathcal{M}$ гомотопически эквивалентна S^1. в) Отображение $f : C \to \mathcal{M}$ задается формулами $f(x,y) = \begin{cases} (2x,y), & 0 \le x \le 1/2, \\ (2x-1, 1-y), & 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$. Докажите, что f непрерывно и опишите гомоморфизм фундаментальных групп $f_* : \pi_1(C,b) \to \pi_1(\mathcal{M}, f(b))$, где $b = (0,0)$. г) Докажите, что граница $\partial\mathcal{M}$ ленты Мебиуса гомеоморфна S^1, а граница ∂C цилиндра — несвязному объединению $S^1 \sqcup S^1$. Опишите гомоморфизмы групп $\iota_* : \pi_1(\partial C, b) \to \pi_1(C,b)$ и $\iota_* : \pi_1(\partial\mathcal{M}, b) \to \pi_1(\mathcal{M}, b)$, где $\iota : \partial C \to C$ и $\iota : \partial\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — тавтологические вложения (каждой точке границы сопоставляется она сама, но уже как точка C или $\mathcal{M}$); $b = (0,0)$ в обоих примерах. д) Докажите, что $\partial\mathcal{M}$ не является ретрактом $\mathcal{M}$: не существует непрерывного отображения $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ такого, что $f(\mathcal{M}) = \partial\mathcal{M}$ и $f(x) = x$ для любого $x \in \partial\mathcal{M}$. Верно ли аналогичное утверждение про C?

Задача 2. а) Решите задачи 6б и 6в листка 2, если вы не сделали этого раньше. б) Пусть $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}P^2$ задана формулой $\gamma(t) = (2t-1, 0)$ (в модели задачи 2-6б). Докажите, что замкнутая кривая $\varphi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \cdot \gamma$ с началом и концом в точке $b = (-1,0)$ стягиваема (гомотопна, с фиксированными концами, кривой $\varphi_1(t) \equiv b$). в) Пусть $p : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ — отображение склейки (ср. задачу 2-6в). Найдите поднятия кривых γ и φ_0, т.е. такие кривые $\Gamma : [0,1] \to S^2$ и $\Phi_0 : [0,1] \to S^2$, что $p \circ \Gamma = \gamma$ и $p \circ \Phi_0 = \varphi_0$ соответственно.

Задача 3. а) Решите задачу 2 листка 2 (первые два определения), если вы не сделали этого раньше. б) Пусть $b \stackrel{\text{def}}{=} (0,0) \in \mathbb{T}^2$. Обозначим $x, y \in \pi_1(\mathbb{T}^2, b)$ классы гомотопии кривых $\xi, \eta : [0,1] \to \mathbb{T}^2$, заданных формулами (во втором определении тора) $\xi(t) = (t,0)$ и $\eta(t) = (0,t)$. Докажите, что $xy = yx$ в группе $\pi_1(\mathbb{T}^2, b)$. Сравните результат с задачей 4 листка 7. в) Найдите $f_*(x)$ и $f_*(y)$, где $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ задано формулой $f(u,v) = (1-u, 1-v)$.

Задача 4. Напомним (задача 6д листка 2), что бутылкой Клейна называется квадрат $K = [0,1]^2$, в котором склеены точки $(0,y) \sim (1,1-y)$ для всех $0 \le y \le 1$ и точки $(x,0) \sim (x,1)$ для всех $0 \le x \le 1$. Обозначим $b = (0,0) \in K$. а) Докажите, что в группе $\pi_1(K,b)$ имеет место соотношение $zw = w^{-1}z$, где z и w — классы гомотопии кривых $\zeta, \omega : [0,1] \to K$, заданных формулами $\zeta(t) = (t,0)$ и $\omega(t) = (0,t)$ соответственно. б) Найдите $f_*(z)$ и $f_*(w)$, где $f : K \to K$ задано формулой $f(u,v) = (1-u, 1-v)$. в) Отображение $h : \mathbb{T}^2 \to K$ задано формулами $h(u,v) = \begin{cases} (2u, v), & 0 \le u \le 1/2, \\ (2u-1, 1-v), & 1/2 \le u \le 1. \end{cases}$. Докажите, что h непрерывно и выразите элементы $h_*(x), h_*(y) \in \pi_1(K,b)$, где $x, y \in \pi_1(\mathbb{T}^2)$ определены в задаче 3б, через z и w. Докажите, что $h_*(x)$, $h_*(y)$ порождают в группе с образующими z, w подгруппу индекса 2.