7. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА ОКРУЖНОСТИ

Задача 1 (подготовительная)**.** Пусть $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, для которой $F(0) = 0$, $F(1) = 1$. Пусть $c \in \mathbb{R}$ — регулярное значение F, т.е. если $F(x) = c$, то $F'(x) \neq 0$. а) Докажите, что каждая точка множества $F^{-1}(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in [0,1] \mid F(x) = c\}$ изолирована, а само множество конечно. б) Докажите, что число $\deg_c F \stackrel{\text{def}}{=} \#\{x \in [0,1] \mid F(x) = c, F'(x) > 0\} - \#\{x \in [0,1] \mid F(x) = c, F'(x) < 0\}$ равно 1, если $0 < c < 1$, и равно 0 при $c < 0$ и $c > 1$.

Непрерывное отображение $f : S^1 \to S^1$ называется гладким, если его поднятие $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ гладкое (имеет на $[0,1]$ непрерывную производную).Точка $c \in S^1$ называется регулярным значением отображения f, если $F'(t) \neq 0$ для всякого $t \in [0,1]$ такого, что $p(F(t)) = c$ ($p : \mathbb{R} \to S^1$ — стандартная проекция).

Задача 2. а) Докажите, что гладкость f и тот факт, что $c \in S^1$ — регулярное значение, не зависит от выбора поднятия F отображения f. б) Докажите, что каждая точка множества $\{t \in [0,1] \mid p(F(t)) = c\}$ изолирована, а само множество конечно. в) Докажите, что число $\deg_c f \stackrel{\text{def}}{=} \#\{t \in [0,1] \mid p(F(t)) = c, F'(t) > 0\} - \#\{t \in [0,1] \mid p(F(t)) = c, F'(t) < 0\}$ равно индексу (он же степень) отображения $f : S^1 \to S^1$ (и, в частности, не зависит от c и от выбора поднятия F).

Задача 3. а) Пусть $n > 1$, и $a, b \in S^n$ — северный и южный полюса сферы. Докажите, что произвольное непрерывное отображение $f_0 : [0,1] \to S^n$, $f_0(0) = f_0(1) = a$, гомотопно с фиксированными концами непрерывному отображению $f_1 : [0,1] \to S^n$ такому, что $f_1(t) \neq b$ при всех $t \in [0,1]$. б) Докажите, что $\pi_1(S^n, a)$ — тривиальная группа.

Задача 4. Вычислите фундаментальную группу тора $S^1 \times S^1$.

Задача 5. Пусть $f : S^1 \to S^1$ — непрерывное отображение степени d. Докажите, что гомоморфизм фундаментальных групп $f_* : \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^1)$ — отображение $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, переводящее всякое число n в dn.

Задача 6. Решите задачу 5 семинара 5, если Вы еще не сделали этого раньше.

Указание (к пункту а))**.** Пусть $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — отображение, заданное равенством $q(z) = z^2$. Опишите гомоморфизм $q_* : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \to \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Пусть теперь w существует. Докажите, что $w(0) = 0$ и рассмотрите гомоморфизм $w_* : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \to \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Как он связан с гомоморфизмом q_*?

Указание (к пункту б))**.** Докажите, что $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Пусть теперь f существует; рассмотрите гомоморфизмы $f_* : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \to \pi_1(\mathbb{C})$ и $(\exp \circ f)_* : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \to \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$.