# 6. ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

**Задача 1.** а) Докажите, что при гомеоморфизме круга (с границей) в себя точки границы переходят в точки границы. б) Докажите, что цилиндр $S^1 \times [0,1]$ и лента Мебиуса не гомеоморфны. Являются ли они гомотопически эквивалентными?

Пусть $X_n$ — букет $n$ окружностей, т.е. несвязное объединение $n$ окружностей, на каждой из которых отмечена точка, и все отмеченные точки склеены (точка, полученная при этой склейке, называется вершиной букета). Обозначим $f_k : S^1 \to X_n$ отображение, переводящее окружность гомеоморфно в $k$-ю окружность букета ($1 \le k \le n$), а $g_k : X_n \to S^1$ — отображение, переводящее $k$-ю окружность букета гомеоморфно в $S^1$, причем вершина букета переходит в точку $b = (1,0)$, и все точки остальных окружностей букета также переходят в $b$.

**Задача 2.** а) Найдите индекс отображений $g_\ell \circ f_k : S^1 \to S^1$ при всевозможных $k$ и $\ell$. б) Докажите, что все отображения $f_k, g_k$ не гомотопны отображениям, переводящим соответствующие пространства в точку. в) Докажите, что $X_n$ при $n > 1$ гомотопически не эквивалентен окружности. г) Докажите, что $X_n$ и $X_m$ при $m \neq n$ гомотопически не эквивалентны друг другу.

Напомним, что сферой с $g$ ручками называется результат попарного отождествления противоположных сторон $4g$-угольника "без перекрутки". Так, сфера с одной ручкой это тор $S^1 \times S^1$.

**Задача 3.** а) Докажите, что сфера с $g$ ручками и с выколотой точкой гомотопически эквивалента букету $2g$ окружностей. б) Докажите, что сфера с $k$ ручками не гомеоморфна сфере с $\ell$ ручками при $k \neq \ell$.

**Указание** (к задаче 3б)**.** Воспользуйтесь результатом задачи 2г.

Графом называется результат склеивания конечного или бесконечного множества отрезков по какому-либо отождествлению их концов. Склеенные отрезки называются ребрами графа, а точки, в которые склеились концы, — вершинами. Количество концов ребер, склеенных в данную вершину, называется валентностью вершины. Если количество ребер конечно, то граф называется конечным; если валентность каждой вершины конечна, то граф называется локально конечным.

**Задача 4.** Пусть $G_1, G_2$ — гомеоморфные локально конечные графы, $v$ — вершина $G_1$, и $f : G_1 \to G_2$ — гомеоморфизм. Докажите, что если валентность $v$ не равна 2, то $f(v) \in G_2$ — вершина той же валентности.

**Указание.** Рассмотрите вспомогательные фактор-пространства $H_1, H_2$, полученные из $G_1, G_2$ склеиванием в точку всего, кроме маленьких кусков ребер, примыкающих к точкам $v$ и $f(v)$ соответственно.

**Задача 5.** а) Пусть граф $G$ локально конечен. Докажите, что подмножество $X \subset G$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и лежит в объединении конечного множества ребер. б) Пусть $G$ — граф, изображенный на рис. 1 (бесконечное дерево). Докажите, что $\pi_1(G)$ тривиальна. в) Докажите, что $G$ стягиваем (гомотопически эквивалентен точке).

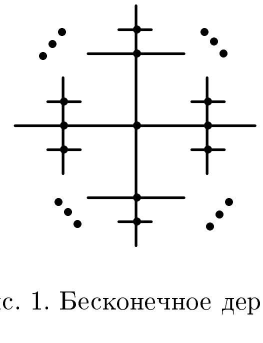

Рис. 1. Бесконечное дерево