5. ОТОБРАЖЕНИЯ ИЗ ОКРУЖНОСТИ В ОКРУЖНОСТЬ

Задача 1 совпадает (по ошибке) с задачей 5 семинара 4. Решайте задачи семинара 4!

Задача 2. Пусть $f(z) = (z-\lambda_1)^{m_1} \dots (z-\lambda_s)^{m_s}$ — многочлен от комплексного переменного, и пусть $\omega_k \subset \mathbb{C}$ — окружность с центром λ_k, не содержащая внутри себя других λ_j. Пусть $\Phi_k : \omega_k \to S^1$ — отображение, заданное равенством $\Phi_k(z) = f(z)/\,|f(z)|$; здесь $S^1 \overset{\text{def}}{=} \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\}$ — окружность единичного радиуса. Докажите, что $\operatorname{ind} \Phi_k = m_k$.

Задача 3. а) Пусть $f : S^1 \to S^1$ — непрерывное отображение, $\operatorname{ind} f \neq 0$. Докажите, что $f(S^1) = S^1$. б) Уточнение утверждения пункта 3а: прообраз $f^{-1}(a)$ любой точки $a \in S^1$ состоит по крайней мере из $|\operatorname{ind}(f)|$ точек. в) Пусть $f, g : S^1 \to S^1$ — непрерывные отображения, $\operatorname{ind}(f) \neq \operatorname{ind}(g)$. Докажите, что существует точка $a \in S^1$ такая, что $f(a) = g(a)$.

Задача 4. Пусть $f, g : S^1 \to S^1$ — непрерывные отображения. Выразите $\operatorname{ind}(f \circ g)$ через $\operatorname{ind}(f)$ и $\operatorname{ind}(g)$.

Задача 5. а) Докажите, что не существует непрерывной функции $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ такой, что $(w(z))^2 = z$ для всех $z \in \mathbb{C}$. б) Докажите, что не существует непрерывной функции $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ такой, что $\exp f(z) = z$ для всех $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Задача 6. а) Пусть Ω — круг с k дырками, ω_0 — внешняя граница круга, $\omega_1, \dots, \omega_k$ — границы дырок. Пусть также V — векторное поле на Ω, не имеющее нулей. При $a \in \omega_i$ обозначим $u(a)$ вектор единичный длины, касательный к ω_i и направленный против часовой стрелки, если $i = 0$, и по часовой стрелке, если $i = 1, \dots, k$. Обозначим $\varphi(a) \in S^1$ угол между векторами $V(a)$ и $u(a)$; здесь $a \in \omega_i$ и S^1 — окружность единичного радиуса. Отображение $a \mapsto \varphi(a)$, где $a \in \omega_i$, обозначим $\Phi_i : S^1 \to S^1$. Докажите, что $\sum_{i=0}^{k} \operatorname{ind} \Phi_i = 1 - k$. б) Пусть Ω — тор с дыркой, ω — граница дырки, V — касательное векторное поле на Ω, не имеющее нулей. При $a \in \omega$ обозначим $u(a)$ вектор единичной длины, касательный к ω и неправленный согласно выбранной ориентации Ω (выберем любую из двух). Обозначим $\varphi(a) \in S^1$ угол между векторами $V(a)$ и $u(a)$; здесь $a \in \omega$. Отображение $a \mapsto \varphi(a)$, где $a \in \omega$, обозначим $\Phi : S^1 \to S^1$. Докажите, что $\operatorname{ind}(\Phi) = -1$. в) Решите задачу 4ж из листка 1: докажите, что на кренделе не существует касательного векторного поля без нулей.