4. КОМПАКТНОСТЬ

Задача 1. а) Докажите, что ограниченное и замкнутое множество $X \subset \mathbb{R}^n$ компактно. б) Докажите, что компакт $X \subset \mathbb{R}^n$ ограничен и замкнут.

Задача 2. а) (Обобщенным) канторовым множеством называется множество K_8 действительных чисел $t \in [0,1]$, в десятичной записи которых (бесконечной) не содержится цифра 8. Компактно ли K_8? (в топологии подмножества $\mathbb{R}$) б) Опишите компоненты линейной связности множества K_8. в) Определим по аналогии с K_8 множество $K_7 \subset [0,1]$, состоящее из чисел без цифры 7. Гомеоморфны ли K_7 и K_8?

Задача 3. а) Докажите, что множество $X = \{(x_1,\dots,x_n) \subset \mathbb{R}^n \mid x_1,\dots,x_n \geq 0, x_1+\dots+x_n = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ компактно. Выведите отсюда, что существует точка $(a_1,\dots,a_n) \in X$, в которой функция $f(x_1,\dots,x_n) = x_1 \dots x_n$ достигает своего наибольшего (на X) значения. б) Пусть $x > y > 0$. Докажите, что $xy < \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$. в) Пусть $(a_1,\dots,a_n) \in X$ — точка, о которой говорится в пункте 3а. Докажите, что $a_1 = \dots = a_n = 1/n$. г) Докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: $\sqrt[n]{y_1 \dots y_n} \leq (y_1 + \dots + y_n)/n$ для всех $y_1,\dots,y_n \geq 0$.

Задача 4. Пусть $X_0 \supseteq X_1 \supseteq \dots \supseteq X_n \supseteq \dots$, причем все топологические пространства X_i компактны и хаусдорфовы. а) Докажите, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \varnothing$. б) Приведите пример, показывающий, что в этом утверждении нельзя отказаться от компактности. в) Пусть X — компакт, а подмножество $Y \subset X$ бесконечно. Докажите, что у Y имеется предельная точка, т.е. существует $a \in X$ такая, что любое открытое подмножество $U \subset X$, содержащее a, пересекается с Y. (При этом необязательно $a \in Y$!)

Задача 5 (повторение старого материала). а) Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, но $X \neq \mathbb{R}^n$. Докажите, что в $\mathbb{R}^n$ имеется граничная точка u такая, что если $u \in U$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто, то U пересекается как с X, так и с $\mathbb{R}^n \setminus X$. б) Докажите, что множество $X \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои граничные точки.

Задача 6. У основателя рода конечное количество детей. У каждого из этих детей, в свою очередь, — конечное количество детей (возможно, 0). У тех — тоже конечное количество детей, и т.д. Известно, что род живет вечно, т.е. в каждом поколении имеется хотя бы один человек. а) Докажите, что найдется бесконечная цепочка $A_1, A_2, \dots$, в которой A_1 — основатель рода, и каждый A_i является родителем A_{i+1}. б*) При чем тут компактность? А задача 2а?