3. СВЯЗНОСТЬ И ЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ

Задача 1. Докажите, что топологическое пространство связно тогда и только тогда, когда его образ при произвольном непрерывном отображении в дискретное пространство состоит из одной точки.

Задача 2. Опишите связные подмножества а) множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$, б) (обобщенного) канторова множества — множества $K \subset [0,1]$, состоящего из действительных чисел, в записи которых бесконечными десятичными дробями встречаются только цифры 0 и 1. Топология в обоих примерах — как в подмножестве $\mathbb{R}$.

Задача 3. Пусть X — топологическое пространство. Подмножество $Y \subseteq X$ называется компонентой линейной связности, если оно линейно связно, а любое подмножество $Z \subseteq X$ такое, что $Y \subset Z$, линейно несвязно. а) Докажите, что любое топологическое пространство является объединением непересекающихся компонент линейной связности. б) Обязательно ли компонента линейной связности открыта? А замкнута?

Задача 4. а) Докажите, что окружность, отрезок и интервал попарно не гомеоморфны. б) Разбейте заглавные буквы русского алфавита (в стандартном начертании без засечек:
АБВГДЕЁЖЗИЙКЛМНОПРСТУФХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ) на группы гомеоморфных.

Задача 5. а) Пусть $P \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклый многоугольник. Докажите, что существует горизонтальная (параллельная оси x) прямая $\ell \subset \mathbb{R}^2$, делящая его площадь пополам. б) Пусть $P_1, P_2 \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклые многоугольники. Докажите, что существует прямая $\ell \subset \mathbb{R}^2$, делящая площадь каждого из них пополам.

Замечание. На самом деле в данной задаче требование выпуклости (и даже многоугольности) можно существенно ослабить, но тогда возникнет техническая проблема, что такое “произвольный многоугольник” (или его обобщение) на плоскости и как определить его площадь. Кстати, а как определить площадь для выпуклого многоугольника?

Задача 6. Пусть $X = A \cup B \subset \mathbb{R}^2$, где $A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ и $B = \{b(t) \mid t \geq 0\}$, где $b(t) = (\frac{t}{t+1}\cos t, \frac{t}{t+1}\sin t)$; топология X — топология подмножества в $\mathbb{R}^2$. а) Изобразите множество X на рисунке. б) Являются ли подмножества $A \subset X$ и $B \subset X$ открытыми? А замкнутыми? (в топологии множества X) в) Докажите, что пространство X связно. г) Докажите, что A и B линейно связны. д) Докажите, что B гомеоморфно лучу $[0, +\infty)$. е) Пусть $a \in A$, $b \in B$. Докажите, что не существует непрерывной кривой $\gamma : [0,1] \to X$ такой, что $\gamma(0) = a$ и $\gamma(1) = b$. Отсюда вытекает, что X линейно несвязно. Сколько в X компонент линейной связности?

Указание (к пункту 6е)**.** Пусть γ — указанная кривая, а $f : B \to [0, +\infty)$ — гомеоморфизм из пункта 6д. Пусть $f(b) = t_0$. Докажите, что для всякого $t > t_0$ существует $s \in [0,1]$ такое, что $\gamma(s) = f(t)$. Как ведет себя точка $f(t)$ при $t \to +\infty$?