2. ГОМЕОМОРФИЗМ

Задача 1. Докажите, что отображение $f : [0,1) \to S^1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$, заданное формулой $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, непрерывно и взаимно однозначно, но не является гомеоморфизмом.

Задача 2. Докажите, что следующие пространства гомеоморфны: а) прямое произведение $S^1 \times S^1$; б) квадрат $[0,1]^2$, в котором точки сторон склеены по правилу $(x,0) \sim (x,1)$ и $(0,y) \sim (1,y)$ для всех $x, y \in [0,1]$; в) плоскость $\mathbb{R}^2$, в которой склеены точки, разность координат которых (и x, и y) — целая: $(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$, $y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$. Это пространство называется двумерным тором. Придумайте и докажите n-мерный аналог этих утверждений.

Джойном топологических пространств X и Y (обозначение $X * Y$) называется фактор прямого произведения $X \times [0,1] \times Y$ по отношению $(x,0,y_1) \sim (x,0,y_2)$ и $(x_1,1,y) \sim (x_2,1,y)$ для всех $x, x_1, x_2 \in X$ и всех $y, y_1, y_2 \in Y$. Джойн $X * \{\mathrm{pt}\}$, где $\{\mathrm{pt}\}$ — пространство из одной точки, называется конусом над X и обозначается CX. Джойн $X * S^0$, где S^0 — пространство из двух точек (с дискретной топологией), называется надстройкой над X и обозначается ΣX.

Задача 3. Докажите, что а) конус над сферой S^n гомеоморфен диску B^{n+1}; б) надстройка над сферой S^n гомеоморфна сфере S^{n+1}.

Задача 4. Докажите, что а) джойн $S^1 * S^1$ гомеоморфен S^3; б) джойн $S^n * S^k$ гомеоморфен S^{n+k+1}.

Проективным пространством размерности n (обозначение $\mathbb{R}P^n$) называется множество $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,\dots,0\}$ ($n+1$-мерное пространство без начала координат), в котором склеены все точки, лежащие на одной прямой, проходящей через начало координат: $(x_0,\dots,x_n) \sim (tx_0,\dots,tx_n)$ для всех $(x_0,\dots,x_n) \neq (0,\dots,0)$ и всех $t \neq 0$. Неформально говорят, что $\mathbb{R}P^n$ — множество прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат. В этом определении можно заменить поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел (можно и любым другим полем $\mathbb{F}$, но тогда непонятно, какая топология вводится в множестве $\mathbb{F}^n$).

Задача 5. а) Докажите, что $\mathbb{R}P^1$ (множество прямых на плоскости, проходящих через начало координат) гомеоморфно окружности. б) Докажите, что $\mathbb{C}P^1$ (множество комплексных прямых в $\mathbb{C}^2$, проходящих через начало координат) гомеоморфно двумерной сфере.

Лентой Мебиуса называется квадрат $[0,1]^2$, в котором склеены точки $(0,y) \sim (1,1-y)$ для всех $0 \le y \le 1$. Границей ленты называется множество точек $\{(x,0),(x,1) \mid 0 \le x \le 1\}$

Задача 6. Докажите, что проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$ гомеоморфна а) квадрату $K = [0,1]^2$, в котором склеены точки $(0,y) \sim (1,1-y)$ для всех $0 \le y \le 1$ и точки $(x,0) \sim (1-x,1)$ для всех $0 \le x \le 1$; б) кругу $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$, в котором склеены диаметрально противоположные точки граничной окружности: $(x,y) \sim (-x,-y)$ для всех (x,y) таких, что $x^2+y^2=1$; в) двумерной сфере $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$, в которой склеены диаметрально противоположные точки: $(x,y,z) \sim (-x,-y,-z)$ для всех $(x,y,z) \in S^2$. г) Пусть $L \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 1/3 \le y \le 2/3\} \subset K = [0,1]^2$. Докажите, что если склеить из K проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$ (как в пункте 6а), то образ L при склеивании гомеоморфен ленте Мебиуса, а образ дополнения $K \setminus L$ — кругу. Тем самым (уточните!) проективная плоскость получается склеиванием по границе круга и ленты Мебиуса. д) Бутылкой Клейна называется квадрат $K = [0,1]^2$, в котором склеены точки $(0,y) \sim (1,1-y)$ для всех $0 \le y \le 1$ и точки $(x,0) \sim (x,1)$ для всех $0 \le x \le 1$. Докажите, что бутылка Клейна получается склеиванием двух лент Мебиуса по границе. е) Проделаем в бутылке Клейна маленькую круглую дырку $(\{(x,y) \in K \mid (x-1/2)^2 + (y-1/2)^2 \le 1/9\})$ и склеим ее границу с границей ленты Мебиуса. Докажите, что полученное пространство гомеоморфно тору $\mathbb{T}^2$, в котором проделана такая же круглая дырка, граница которой склеена с границей ленты Мебиуса.

Сферой с g ручками называется результат попарного отождествления противоположных сторон $4g$-угольника “без перекрутки”. Так, согласно задаче 2, сфера с одной ручкой это тор $S^1 \times S^1$.

Задача 7. а) Докажите, что сфера с g ручками гомеоморфна сфере с $g-1$ ручками и дыркой, к которой приклеена по границе ручка — тор с дыркой. б) Склеим каждую сторону шестиугольника с противоположной без перекрутки. Докажите, что полученная поверхность гомеоморфна тору $S^1 \times S^1$, и нарисуйте на торе склеенные стороны шестиугольника. в) Та же задача для восьмиугольника — вместо тора получится сфера с двумя ручками. г*) Разобьем стороны $4g$-угольника или $4g+2$-угольника на пары и склеим без перекрутки. Докажите, что полученное топологическое пространство гомеоморфно сфере с $h \le g$ ручками (для некоторого h, зависящего от того, какие пары сторон склеиваются).

Задача 8. а) Докажите, что каждое из множеств $A = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1, |z| \le |w|\}$ и $B = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1, |z| \ge |w|\}$ гомеоморфно полноторию, то есть произведению $S^1 \times B^2$ (окружности на круг). б) Докажите, что пересечение $A \cap B$ гомеоморфно двумерному тору. в) Докажите, что объединение $A \cup B$ гомеоморфно трехмерной сфере $S^3 = \{(p,q,r,s) \in \mathbb{R}^4 \mid p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 1\}$. г) Докажите, что дополнение в $\mathbb{R}^3$ к стандартно вложенному полноторию (бублику из теста) гомеоморфно полноторию без одной точки.

Указание (к пункту 8г)**.** Докажите, что S^n без одной точки гомеоморфно $\mathbb{R}^n$; для решения задачи 8г нужно это утверждение при $n = 3$.

Задача 9. а) Докажите, что множество прямых на плоскости (не обязательно проходящих через начало координат) гомеоморфно ленте Мебиуса без границы. Куда переходит при гомеоморфизме множество прямых, проходящих через начало координат? через произвольную фиксированную точку плоскости? множество прямых, параллельных оси абсцисс? множество прямых, пересекающих единичный круг с центром в начале координат? б) Говорят, что множество точек проективной плоскости образуют проективную прямую, если соответствующие прямые в $\mathbb{R}^3$ "заметают" плоскость, проходящую через начало координат. Докажите, что множество проективных прямых на проективной плоскости гомеоморфно проективной плоскости. Куда переходит при этом гомеоморфизме множество прямых, проходящих через заданную точку? множество прямых, касающихся заданной окружности?

Задача 10. а) Докажите, что плоскость $\mathbb{R}^2$, в которой отождествляются точки $(x,y) \sim (y,x)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$, гомеоморфна полуплоскости (с границей). б) Докажите, что плоскость $\mathbb{R}^2$, в которой отождествляются точки $(x,y) \sim (-x,-y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$, гомеоморфна плоскости (без отождествлений). в) Докажите, что комплексная плоскость $\mathbb{C}^2$, в которой отождествляются точки $(x,y) \sim (y,x)$ для всех $x, y \in \mathbb{C}$, гомеоморфна $\mathbb{C}^2$. г) Докажите, что пространство $\mathbb{C}^n$, в котором отождествляются точки, отличающиеся друг от друга произвольной перестановкой координат, гомеоморфно $\mathbb{C}^n$.

Указание (к пункту 10г)**.** Таким образом, в подмножестве, на которые разбивается $\mathbb{C}^n$, может быть от одной до $n!$ точек: одна точка $\{(c, \dots, c)\}$ для любого $c \in \mathbb{C}$; $n!$ точек $\{(x_1, \dots, x_n), \dots\}$, где все $x_i \in \mathbb{C}$ попарно различны.

Задача 11. а) Докажите, что двумерный тор $S^1 \times S^1$, в котором склеены точки $(x,y) \sim (y,x)$ для всех $x, y \in S^1$, гомеоморфен ленте Мебиуса. б) Докажите, что пространство $S^2 \times S^2$, в котором склеены точки $(x,y) \sim (y,x)$ для всех $x, y \in S^2$, гомеоморфно $\mathbb{C}P^2$. в) Докажите, что пространство $(S^2)^n$, в котором склеены наборы $(x_1, \dots, x_n)$, отличающиеся перестановкой точек $x_1, \dots, x_n \in S^2$, гомеоморфно комплексному проективному пространству $\mathbb{C}P^n$. г) Докажите, что пространство $(\mathbb{T}^2)^n$, где $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ — двумерный тор, в котором склеены наборы $(x_1, \dots, x_n)$, отличающиеся перестановкой точек $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{T}^2$, гомеоморфно $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}P^{n-1}$.

Указание (к пункту 11в)**.** Воспользуйтесь результатом задачи 5б и дальше действуйте, как в задаче 10г.