ЛЕКЦИЯ 13

Краткое содержание. Доказательство теоремы о клеточной аппроксимации и теоремы о фундаментальной группе клеточного пространства.

Здесь мы, в завершение первой части курса, приводим доказательства двух теорем из лекции 12.

Пусть $B_2 \overset{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ — единичный круг на плоскости; его граница $\partial B_2 = S^1$ — единичная окружность. Пусть $\omega_r \subset B_2$ — окружность радиуса r, касающаяся граничной окружности ∂B_2 в точке $(1, 0)$; здесь $0 \le r \le 1$, так что $\omega_r \subset B_2$. Пусть также $\xi_r : [0, 1] \to \omega_r$ — стандартная параметризация окружности отрезком, аналогично лекции 12; при этом $\xi_r(0) = \xi_r(1) = (1, 0)$ (а в остальном отображение ξ_r взаимно однозначно).

Пусть X — линейно связное топологическое пространство, $b \in X$, а $F : B_2 \to X$ — непрерывное отображение, для которого $F(1, 0) = b$. Тогда композиция $\gamma_r \overset{\text{def}}{=} F \circ \xi_r$ представляет собой стягивание петель — гомотопию с фиксированными концами, соединяющую петлю $\gamma_1 \overset{\text{def}}{=} F \circ \xi_1$ с петлей $\gamma_0(t) \equiv b$, стоящей в точке b. Ясно, что любое стягивание петель можно получить подобным образом из некоторого отображения F.

Доказательство теоремы о фундаментальной группе. Согласно следствию 2 из лекции 12, группа $\pi_1(X, b)$ изоморфна $\pi_1(\mathrm{sk}_2(X), b)$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $X = \mathrm{sk}_2(X)$, т.е. содержит только нульмерные, одномерные и двумерные клетки. Обозначим $\iota \overset{\text{def}}{=} \iota_1 : \mathrm{sk}_1(X) \to X$ (тавтологическое вложение).

Отображение $u_\beta = \chi_\beta^{(2)}\Big|_{\partial B_2}$ продолжается до отображения $\chi_\beta^{(2)} : B_2 \to X$. Из замечания перед доказательством вытекает, что u_β гомотопно (с фиксированными концами) отображению в точку. Тем самым все элементы u_β принадлежат ядру гомоморфизма ι_*.

Обратно, пусть $u \in \operatorname{Ker} \iota_*$, и пусть $\gamma : [0, 1] \to \mathrm{sk}_1(X)$ — петля, представляющая класс u; $\gamma(0) = \gamma(1) = b$. Петля γ стягивается в точку b с неподвижными концами. Согласно тому же замечанию, существует непрерывное отображение $\Gamma : B_2 \to \mathrm{sk}_2(X)$, совпадающее с γ на границе $\partial B_2 \subset B_2$.

Отождествим каждую клетку $e_\beta^{(2)}$ с открытым кругом Ω_β радиуса 1 с помощью характеристического отображения. В каждом круге Ω_β (т.е. в клетке $e_\beta^{(2)}$) рассмотрим концентрические круги $\Omega_{1,\beta} \subset \dots \subset \Omega_{4,\beta}$ радиусов $1/5, \dots, 4/5$ соответственно. Триангулируем теперь круг B_2 достаточно мелко, т.е. разобьем его на конечное число (криволинейных) треугольников $\Delta_1, \dots, \Delta_N$ таких, что диаметр множества $\Gamma(\Delta_i) \subset$ меньше $1/5$ (почему это возможно?). Тем самым, если множество $\Gamma(\Delta_i)$ пересекается к кругом $\Omega_{4,\beta}$, то оно целиком лежит в клетке Ω_β.

Обозначим теперь $K \overset{\text{def}}{=} \bigcup\{\Delta_i \subset B_2 \mid \exists \beta\, \Gamma(\Delta_i) \cap \Omega_{4,\beta} \ne \varnothing\} \subset B_2$; индекс β для каждого $\Delta_i \subset K$ единственный, поскольку круги $\Omega_{4,\beta} \subset \Omega_\beta$ при разных β не пересекаются. Пусть $\Gamma' : K \to X$ — непрерывное отображение, совпадающее с Γ в вершинах треугольников Δ_i и линейное на каждом Δ_i (поскольку $\Delta_i \subset B_2 \subset \mathbb{R}^2$ и $\Gamma(\Delta_i) \subset \Omega_\beta \subset \mathbb{R}^2$, понятие линейного отображения здесь имеет смысл!). Отображение Γ' гомотопно Γ, причем гомотопию можно выбрать линейной по параметру: $\Gamma_t \overset{\text{def}}{=} t\Gamma' + (1 - t)\Gamma$ (это имеет смысл по той же причине, что и кусочная линейность Γ').

Рассмотрим теперь отображение $\Gamma'' : B_2 \to X$, заданное на каждой клетке Ω_β формулой

$$\Gamma''(x) = \begin{cases} \Gamma'(x), & x \in \Omega_{2,\beta}, \\ \Gamma_{3-5|x|}(x), & x \in \Omega_{3,\beta} \setminus \Omega_{2,\beta}, \\ \Gamma(x), & x \in \Omega_\beta \setminus \Omega_{3,\beta} \end{cases}$$

Очевидно, Γ'' непрерывно и совпадает с Γ (то есть с γ) на границе круга B_2. Тем самым Γ'' это также стягивание петли γ в точку; в дальнейшем будем для простоты обозначать его Γ.

Обозначим $\delta_\beta \subset \Omega_{1,\beta}$ круг, целиком лежащий в $\Gamma(\Delta_i)$ при некотором i (т.е. не пересекающийся с образами ребер и вершин триангуляции Δ круга B_2). Пусть теперь $R_{\beta,t} : \Omega_\beta \to \Omega_\beta$ — гомотопия, для которой $R_{\beta,0} = \mathrm{id}$, $R_{\beta,t}(x) = x$ для всех $x \in \partial\Omega_\beta$ и $R_{\beta,1}(\delta_\beta) = \Omega_\beta$. Для произвольного $x \in B_2$ пусть β таков, что $\Gamma(x) \in \Omega_\beta$; если $\Gamma(x) \notin \mathrm{sk}_1(X)$, то β существует и единствен. Положим по определению $\Gamma_t(x) = R_{\beta,t}(\Gamma(x))$; если же $\Gamma(x) \in \mathrm{sk}_1(X)$, то $\Gamma_t(x) \overset{\text{def}}{=} x$ — очевидно, это не нарушает непрерывности. Тем самым отображение Γ'_1 совпадает с Γ (и тем самым с γ) на границе B_2 и является, как и Γ, стягиванием кривой γ в точку.

Прообраз $\Gamma^{-1}(\delta_\beta) \subset \Delta_i \subset B_2$ это прообраз круга при линейном отображении, т.е. область E_β, ограниченная эллипсом. Тогда $\Gamma_1(E_\beta) = \Omega_\beta$, и $\Gamma_1(x) \in \mathrm{sk}_1(X)$, если $x \notin \bigcup_\beta E_\beta$. С этого момента будем обозначать Γ_1 опять символом Γ.

Отображение Γ переводит весь круг B_2, кроме объединения непересекающихся эллиптических областей $E_1, \dots, E_N$, в $\mathrm{sk}_1(X)$, на границе круга совпадает с γ, а на границе каждой области E_β совпадает с $\chi_\beta^{(2)}$. Соединим отмеченную точку $b \in \partial B_2$ системой непересекающихся путей $s_1 \dots, s_N$ с границами областей $E_1, \dots, E_N$. Граница круга B_2 гомотопна, в $B_2 \setminus (E_1 \cup \dots \cup E_N)$, кривой $(s_1 \cdot \tau_1 \cdot s_1^{-1}) \cdot \dots \cdot (s_N \cdot \tau_N \cdot s_N^{-1})$, где τ_i — обход границы области E_i (эллипса) против часовой стрелки. Композиция Γ с путем τ_β равна $\chi_\beta^{(2)}$, откуда вытекает, что γ гомотопна (как петля в $\mathrm{sk}_1(X)$) произведению петель вида $(\Gamma \circ s_\beta) \cdot \chi_\beta^{(2)} \cdot (\Gamma \circ s_\beta)^{-1}$, классы гомотопии которых принадлежат нормальной подгруппе, порожденной всеми u_β. $\square$

Для доказательства теоремы о клеточной аппроксимации нам потребуется вспомогательное утверждение:

Лемма 1 (лемма Борсука)**.** *Пусть X — клеточное пространство, Y — произвольное топологическое пространство, $Z \subset X$ — клеточное подпространство. Пусть задана гомотопия $\Phi : Z \times [0,1] \to Y$ и отображение $\Psi_0 : X \to Y$ такое, что $\Psi_0(z) = \Phi(z, 0)$ для любого $z \in Z$. Тогда существует гомотопия $\Psi : X \times [0,1] \to Y$ такая, что $\Psi(x, 0) = \Psi_0(x)$ при всех $x \in X$ и $\Phi(z,t) = \Psi(z,t)$ для всех $z \in Z$, $t \in [0,1]$.*

Доказательство. Зафиксируем клетку $e_\alpha^{(k)}$ пространства X и предположим, что гомотопия Ψ уже задана на всех клетках подпространства Z и на всех клетках $e_\beta^{(i)}$ пространства X размерности $i < k$. Тем самым $\Psi(x,t)$ определена при всех$x \in \partial e_\alpha^{(k)}$ и произвольном t, а также при всех x и $t = 0$. Отождествляя $e_\alpha^{(k)}$ с $\operatorname{int} B_k$, получим задачу продолжения отображения Ψ на $B_k \times [0,1]$ при условии, что оно задано на $C_k \stackrel{\text{def}}{=} \partial B_k \times [0,1] \cup B_k \times \{0\}$.

Существует непрерывное отображение (ретракция) $f : B_k \times [0,1] \to C_k$ такое, что $f(s) = s$ при всех $s \in C_k \subset B_k$ (например, можно вложить $B_k \times [0,1] \subset \mathbb{R}^{k+1}$ и взять в качестве f проекцию из точки $(a, 1+\varepsilon)$, где a — центр круга, а $\varepsilon > 0$ произвольно). Отображение $\Psi(b,t) \stackrel{\text{def}}{=} \Psi(f(b,t))$ ($f(b,t) \in U_k$, поэтому правая часть определена) является искомым продолжением.

Тем самым существует продолжение гомотопии Ψ в произвольную клетку, если во все клетки меньшей размерности гомотопия уже продолжена. При этом продолжение можно делать одновременно для всех клеток данной размерности (почему при этом не нарушается непрерывность?). Таким образом получим для каждого n непрерывное отображение $\Psi_n : \mathrm{sk}_n(X) \times [0,1] \to Y$, продолжающее гомотопию Φ и отображение Ψ_0, причем эти продолжения согласованы: $\Psi_n|_{\mathrm{sk}_{n-1}(X)\times[0,1]} = \Psi_{n-1}$. Это дает отображение $\Psi : X \times [0,1] \to Y$, непрерывность которого вытекает из определения клеточной топологии (непрерывность на каждом остове влечет непрерывность на всем пространстве). $\square$

Доказательство теоремы о клеточной аппроксимации. Рассмотри клетку $e_\alpha^{(k)}$ в X и предположим, что отображение f уже клеточное на Z и на всех клетках размерности меньше k. Поскольку множество $\overline{e_\alpha^{(k)}}$ пересекается с конечным числом клеток, оно компактно; тогда образ $f(\overline{e_\alpha^{(k)}})$ также компактен, откуда вытекает, что $f(e_\alpha^{(k)})$ пересекается с конечным числом клеток в Y.

Пусть $e_\beta^{(m)} \cap f(e_\alpha^{(k)}) \neq \varnothing$ и $m > k$ (если таких клеток нет, то отображение f уже клеточно на клетке $e_\alpha^{(k)}$). Отождествим клетку $e_\beta^{(m)}$ с шаром $B_m \subset \mathbb{R}^m$ радиуса 1 посредством характеристического отображения $\chi_\beta^{(m)}$ и подвергнем на нем отображение f гомотопии, аналогичной гомотопии $\Gamma' t$ из доказательства следствия 2 лекции 12. После гомотопии отображение f на шаре $B_{1,m} \subset B_m \subset \mathbb{R}^m$ радиуса $1/5$ совпадает с кусочно-линейным отображением $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, а поскольку $k < m$, его образ не совпадает со всем B_m (докажите!).

Пусть теперь $y \in B_m \setminus f(e_\alpha^{(k)})$, и пусть $\Phi : B_m \setminus \{y\} \to \partial B_m$ — проекция шара на сферу из точки y. Композиция $f' \stackrel{\text{def}}{=} \Phi \circ f$ гомотопна f; образ $f'(e_\alpha^{(k)})$ пересекается с теми же клетками размерности, большей k, что и $f(e_\alpha^{(k)})$, за исключением $e_\beta^{(m)}$. Повторяя эту процедуру конечное количество раз, построим отображение, гомотопное f и такое, что образ e_α с клетками размерности $m > k$ вообще не пересекается, т.е. лежит в $\mathrm{sk}_k(Y)$. Эту гомотопию можно проделать для всех клеток размерности k одновременно и продолжить затем на все пространство X по лемме Борсука.

Таким образом, если f клеточное на $\mathrm{sk}_{k-1}(X)$, то его можно сделать клеточным на $\mathrm{sk}_k(X)$, подвергнув гомотопии, неподвижной на Z и на $\mathrm{sk}_{k-1}(X)$. Рассуждая так же, как в доказательстве леммы Борсука, получим, что тем самым построена гомотопия f и отображения, клеточного на всем X. $\square$