ЛЕКЦИЯ 12

Краткое содержание. Клеточные разбиения. Теорема о клеточной аппроксимации и описание фундаментальной группы клеточного пространства.

Клеточным пространством называется множество X и набор $\{(e_\alpha^{(k)}, \chi_\alpha^{(k)}) \mid k = 0, 1, \dots, \alpha \in I_k\}$, где I_k — произвольное множество индексов, $e_\alpha^{(k)} \subset X$, а $\chi_\alpha^{(k)} : B_k \to X$ — отображение k-мерного замкнутого шара в X. Множества $e_\alpha^{(k)}$ называются клетками, число k — размерностью клетки $e_\alpha^{(k)}$, а отображение $\chi_\alpha^{(k)}$ называется характеристическим отображением клетки $e_\alpha^{(k)}$. При этом требуется, чтобы набор обладал следующими свойствами:

1) Множества $e_\alpha^{(k)}$ попарно не пересекаются и образуют разбиение множества X: $X = \bigsqcup_{k=0}^\infty \bigsqcup_{\alpha \in I_k} e_\alpha^{(k)}$.
2) Ограничение $\chi_\alpha^{(k)}$ на внутренность $\operatorname{int} B_k$ шара — взаимно однозначное отображение $\operatorname{int} B_k \to e_\alpha^{(k)}$, а образ границы ∂B_k шара лежит в объединении конечного множества клеток $e_\beta^{(l)}$ размерности $l < k$: $\chi_\alpha^{(k)})(\partial B_k) \subset e_{\beta_1}^{(l_1)} \cup \dots e_{\beta_N}^{(l_N)}$; $l_1, \dots, l_N < k$.

Множество индексов I_k может быть конечным, бесконечным (любой мощности) или пустым — не обязательно имеются клетки всех размерностей. Объединение $\operatorname{sk}_n(X) = \bigcup_{k \le n} e_\alpha^{(k)}$ называется n-остовом множества X. Клеточным подпространством X называется подмножество $Y = \bigsqcup_k \bigcup_{\alpha \in J_k} e_\alpha^{(k)} \subset X$ (для некоторого набора подмножеств $J_k \subset I_k$), такое что клетки $e_\alpha^{(k)}$, $\alpha \in J_k$, с характеристическими отображениями $\chi_\alpha^{(k)}$ образуют его клеточное разбиение.

Структура клеточного пространства позволяет ввести в X топологию: множество $A \subset X$ считается замкнутым, если его прообраз $(\chi_\alpha^{(k)})^{-1}(A) \subset B_k$ замкнут при любых k и $\alpha \in I_k$. Нетрудно проверить, что это действительно топология, относительно которой все характеристические отображения непрерывны. Клеточным разбиением топологического пространства Y называется его гомеоморфизм с клеточным пространством.

Клеточные пространства образуют категорию, морфизмами в которой являются клеточные отображения: отображение $f : X_1 \to X_2$ называется клеточным, если $f(\operatorname{sk}_n(X_1)) \subset \operatorname{sk}_n(X_2)$ и отображение f непрерывно относительно клеточной топологии в X_1 и X_2. Тем самым имеется функтор из категории клеточных пространств в категорию топологических пространств.

Пример 1. Клеточное разбиение сферы $S^n = e_1^{(0)} \sqcup e_2^{(n)}$. Нульмерная клетка $e_1^{(0)}$ — точка (как и любая нульмерная клетка); пусть это $b = (0, 0, \dots, 1)$. Тогда $e_2^{(n)} = S^n \setminus \{b\}$; характеристическое отображение $\chi_2 : B_n \to e_2^{(n)}$ действует по формуле $\chi_2(x_1, \dots, x_n) = \left(x_1 \sin(\pi\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}), \dots, x_n \sin(\pi\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}), \cos(\pi\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})\right)$.

Клеточное разбиение шара B_n: внутренность — n-мерная клетка, граница $\partial B_n = S^{n-1}$ разбивается на 2 клетки, как указано выше.

Пример 2. Сфера с g ручками M_g определяется как правильный $4g$-угольник N_{4g} на плоскости, в котором склеены противоположные стороны (точка a стороны c_i склеивается с точкой b стороны c_{i+2g} такой, что отрезок ab перпендикулярен сторонам c_i и c_{i+2g}; здесь стороны $c_1, \dots, c_{4g}$ занумерованы по циклу). Таким образом автоматически получается клеточное разбиение M_g. Оно имеет одну двумерную клетку e_2 — внутренность многоугольника; ее характеристическое отображение $\chi_2 = p \circ h$, где $h : B_2 \to N_{4g}$ — стандартный гомеоморфизм круга и многоугольника, а $p : N_{4g} \to M_g$ — отображение склейки. Кроме того, в M_g имеются одномерные клетки $e_1^{(1)}, \dots, e_1^{(2g)}$, где $e_1^{(i)}$ — образ внутренностей сторон c_i и c_{i+2g} при отображении $p : N_{4g} \to M_g$; характеристические отображения $\chi_1^{(i)}$ очевидны. Единственная нульмерная клетка — образ при отображении p всех вершин многоугольника N_{4g} (они все склеиваются при факторизации — проверьте!).

Аналогично строится клеточное разбиение проективной плоскости, ленты Мебиуса, бутылки Клейна и других поверхностей, склеиваемых из многоугольников.

Пример 3. Клеточное разбиение $\mathbb{R}$: нульмерные клетки — точки с целыми координатами, одномерные — интервалы с концами в этих точках. Перемножая эти клетки n раз, получим клеточное разбиение $\mathbb{R}^n$.

Подчеркнем, что хотя $\mathbb{R}$ гомеоморфно внутренности одномерного диска, у него нет клеточного разбиения из одной одномерной клетки: характеристическое отображение одномерной клетки должно быть определено на одномерном замкнутом шаре, то есть на отрезке. Вообще, верно такое утверждение:

Теорема-упражнение 1. *Клеточное пространство компактно тогда и только тогда, когда оно состоит из конечного количества клеток.*

Пример 4. Одномерное клеточное пространство (т.е. пространство, все клетки которого имеют размерность 0 или 1) называется графом.

Пример 5. Другое клеточное разбиение сферы S^n: в каждой размерности k, $0 \le k \le n$, имеется две клетки, $e_+^{(k)} = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_k > 0, x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$ и $e_- = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_k < 0, x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$. Характеристические отображения $\chi_+^{(k)}(y_1, \dots, y_k) = \left(y_1, \dots, y_k, \sqrt{1-(y_1^2+\dots+y_k^2)}, 0, \dots, 0\right)$ и $\chi_-^{(k)}(y_1, \dots, y_k) = \left(-y_1, \dots, -y_k, -\sqrt{1-(y_1^2+\dots+y_k^2)}, 0, \dots, 0\right)$ соответственно.

Пример 6. Клеточное разбиение $\mathbb{R}P^n$: рассмотрим стандартное накрытие $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$. Тогда в обозначениях примера 5 $p(e_+^{(k)}) = p(e_-^{(k)}) \stackrel{\text{def}}{=} e_k$ и $p \circ \chi_+^{(k)} = p \circ \chi_-^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \chi^{(k)}$. Получается клеточное разбиение $\mathbb{R}P^n$, имеющее в каждой размерности $0 \le k \le n$ единственную клетку $e^{(k)}$ с характеристическим отображением $\chi^{(k)}$.

Пример 7. Бесконечная сфера S^∞ состоит из последовательностей $(x_1, x_2, \dots)$, таких что в каждой последовательности все члены, кроме конечного числа, равны нулю (количество ненулевых членов в каждой последовательности свое), и $\sum_{i=1}^\infty x_i^2 = 1$. Клеточное разбиение S^∞ имеет в каждой размерности по две клетки $e_+^{(k)} = \{(x_0, x_1, \dots) \in S^n \mid x_k > 0, x_{k+1} = x_{k+2} = \dots 0\}$ и $e_+^{(k)} = \{(x_0, x_1, \dots) \in S^n \mid x_k < 0, x_{k+1} = x_{k+2} = \dots 0\}$. Очевидно, $\mathrm{sk}_n(S^\infty) = S^n$ с клеточным разбиением примера 5.

Упражнение 2. Докажите, что сфера S^∞ (с топологией, определяемой клеточным разбиением) стягиваема, т.е. гомотопически эквивалентна точке.

Указание. Для всякого n остов $\mathrm{sk}_n(S^\infty) = S^n$ представляет собой экватор сферы $\mathrm{sk}_{n+1}(S^\infty) = S^{n+1}$ и поэтому стягиваем в точку по нему.

Теорема 3 (о клеточной аппроксимации)**.** *Пусть $f_0 : X \to Y$ — непрерывное отображение клеточных пространств, $Z \subset X$ — клеточное подпространство, и ограничение $f_0|_Z$ клеточное. Тогда существует гомотопия $f_t : X \to Y$, $0 \le t \le 1$ такая, что отображение $f_1 : X \to Y$ клеточное и $f_t(z) \equiv f_0(z)$ (не зависит от t) для любой точки $z \in Z$.*

Прежде чем доказать теорему, извлечем из нее несколько следствий.

Следствие 1. *Если клеточное пространство линейно связно, то его 1-остов также линейно связен.*

Доказательство. Пусть $a, b \in \mathrm{sk}_1(Y)$; без ограничения общности будем считать, что a и b — нульмерные клетки. Поскольку Y линейно связно, существует кривая, соединяющая a и b, т.е. непрерывное отображение $f_0 : [0,1] \to Y$ такое, что $f_0(0) = a$, $f_0(1) = b$. Отрезок $[0,1]$ обладает клеточным разбиением из двух нульмерных клеток $e_1^{(0)} = \{0\}$ и $e_2^{(0)} = \{1\}$ и одной одномерной клетки $e^{(1)} = (0,1)$. Отображение f_0 клеточно на подпространстве $Z = \{0,1\} \subset Y$. Согласно теореме о клеточной аппроксимации, существует кривая $f_1 : [0,1] \to Y$, гомотопная f_0 и такая, что $f_1(0) = f_0(0) = a$, $f_1(1) = f_0(1) = b$ и $f_1([0,1]) \subset \mathrm{sk}_1(Y)$. Это означает, что 1-остов Y линейно связен. □

Теорема-упражнение 4. *1) Утверждение следствия 1 можно обратить: клеточное пространство линейно связно тогда и только тогда, когда линейно связен его 1-остов.*

2) Компоненты линейной связности клеточного пространства замкнуты и открыты в нем. Клеточное пространство линейно связно тогда и только тогда, когда оно связно.

3) Линейно связное клеточное пространство гомотопически эквивалентно пространству с единственной нульмерной клеткой.

Пусть X — клеточное пространство, $\iota_n : \mathrm{sk}_n(X) \to X$ — тавтологическое вложение (каждой точке остова сопоставляется она сама, но уже как точка X). Отображение ι_n непрерывно, так что для произвольной точки $b \in \mathrm{sk}_n(X)$ возникает гомоморфизм фундаментальных групп $\pi_1(\mathrm{sk}_2(X), b) \to (\iota_n)_*(\pi_1(X, b))$.

Следствие 2. *Если пространство X линейно связно, то отображение $(\iota_1)_*$ — эпиморфизм, а $(\iota_n)_*$ при произвольном $n \ge 2$ — изоморфизм. Тем самым как абстрактная группа, $\pi_1(X)$ изоморфна $\pi_1(\mathrm{sk}_2(X))$ (а также $\pi_1(\mathrm{sk}_3(X))$, $\pi_1(\mathrm{sk}_4(X))$ и т.д.) и является фактор-группой группы $\pi_1(\mathrm{sk}_1(X))$.*

Доказательство следствия. Без ограничения общности можно считать, что $b \in X$ являтся нульмерной клеткой. Рассмотрим у $[0,1]$ клеточное разбиение, как у доказательстве следствия 1: $e^{(1)} = (0,1)$, $e_1^{(0)} = \{0\}$, $e_2^{(0)} = \{1\}$. По теореме о клеточной аппроксимации любая петля $\gamma : [0,1] \to X$, $\gamma(0) = \gamma(1) = b$, гомотопна петле $\delta : [0,1] \to \mathrm{sk}_1(X)$, причем гомотопия неподвижна на нульмерных клетках, т.е. является гомотопией с фиксированными концами. Отсюда вытекает, что любая петля в X гомотопна с фиксированными концами петле в $\mathrm{sk}_1(X)$, то есть $(\iota_1)_*$ — эпиморфизм.

Пусть теперь $\Gamma_0 : [0,1]\times[0,1] \to X$ — гомотопия петель с фиксированными концами, при которой $\Gamma_0([0,1]\times\{0,1\}) \subset \mathrm{sk}_1(X)$ и $\Gamma_0(\{0,1\}\times[0,1]) = \{b\}$. У квадрата $[0,1]\times[0,1]$ имеется клеточное разбиение, состоящее из четырех нульмерных клеток — углов квадрата, четырех одномерных клеток — внутренностей сторон, и двумерной клетки — внутренности квадрата.

Легко видеть, что ограничение $\Gamma_0|_{\mathrm{sk}_1([0,1]^2)}$ клеточно. Согласно теореме о клеточной аппроксимации (примененной к $X = [0,1]^2$, $Z = \mathrm{sk}_1([0,1]^2)$ и $f_0 = \Gamma_0$) гомотопия Γ_0 гомотопна гомотопии $\Gamma_1 : [0,1]\times[0,1] \to \mathrm{sk}_2(X)$, причем $\Gamma_1(x,0) = \Gamma_0(x,0)$, $\Gamma_1(x,1) = \Gamma_0(x,1)$ и $\Gamma_1(0,y) = \Gamma_1(1,y) = \Gamma_0(0,y) = \Gamma_0(1,y) = b$ для всех $x,y \in [0,1]$. Это означает, что $(\iota_2)_*$ — изоморфизм.

Если теперь ψ_n — тавтологическое вложение $\mathrm{sk}_2(X) \to \mathrm{sk}_n(X)$, то, с одной стороны, $(\psi_n)_*$ — изоморфизм по уже доказанному, а с другой стороны, $\iota_n = \iota_2 \circ \psi_n$, откуда вытекает, что $(\iota_n)_* = (\iota_2)_* \circ (\psi_n)_*$ — изоморфизм. □

Пусть X — линейно связное топологическое пространство, $b \in X$, и $f : S^1 \to X$ — непрерывное отображение. Рассмотрим стандартное отображение $\xi : [0,1] \to S^1$, заданное равенством $\xi(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ (так что $\xi(0) = \xi(1)$, а в остальном ξ взаимно однозначно), и обозначим $a \overset{\text{def}}{=} f(\xi(0)) = f(\xi(1))$. Пусть $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(b,a)$ (т.е. класс гомотопии путей в X из b в a); тогда определен элемент $f_\gamma \overset{\text{def}}{=} \gamma\cdot(f\circ\xi)\cdot\gamma^{-1} \in \mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(b,b) \overset{\text{def}}{=} \pi_1(X,b)$. При замене γ на $\delta \overset{\text{def}}{=} \lambda\cdot\gamma$ (где, тем самым, $\lambda = \delta\cdot\gamma^{-1} \in \pi_1(X,b)$) элемент фундаментальной группы меняется на сопряженный: $f_\delta = \delta\cdot(f\circ\xi)\cdot\delta^{-1} = \lambda\cdot f_\gamma\cdot\lambda^{-1}$. Тем самым непрерывное отображение f задает элемент фундаментальной группы с точностью до сопряженности.

Пусть теперь X — линейно связное клеточное пространство с единственной нульмерной клеткой $e^{(0)} \overset{\text{def}}{=} \{b\}$.

Остов $\mathrm{sk}_1(X)$ это букет окружностей с вершиной b, каждая окружность — замыкание одномерной клетки. Отсюда $\pi_1(\mathrm{sk}_1(X),b) = \mathcal{F}(\{e^{(1)}_\alpha \mid \alpha\in I_1\})$ (свободная группа, образующие которой находятся во взаимно однозначном соответствии с одномерными клетками). Для произвольной двумерной клетки $e^{(2)}_\beta$ рассмотрим ограничение $u_\beta \overset{\text{def}}{=} \chi^{(2)}_\beta\Big|_{\partial B_2}$ характеристического отображения $\chi^{(2)}_\beta$ на границу круга $\partial B_2 = S^1$. Как было показано выше, это отображение задает элемент группы $\pi_1(\mathrm{sk}_1(X))$. Он определен с точностью до сопряженности; выберем для каждого β один конкретный представитель соответствующего класса сопряженности и обозначим его так же: $u_\beta \in \pi_1(\mathrm{sk}_1(X))$.

Теорема 5. *Фундаментальная группа клеточного пространства X с единственной нульмерной клеткой изоморфна фактор-группе группы $\pi_1(\mathrm{sk}_1(X))$ по нормальной подгруппе, порожденной всеми элементами u_β (иными словами, группа $\pi_1(X)$ порождена образующими $\chi^{(1)}_\alpha$, $\alpha\in I_1$ и соотношениями $u_\beta = 1$, $\beta\in I_2$).*

Пример 8. Из клеточных разбиений примеров 1–6 и теоремы 5 вытекает, что $\pi_1(S^n)$ тривиальна при $n>1$ и равна $\mathbb{Z}$ при $n=1$, $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (эти факты были доказаны ранее), а также что фундаментальная группы сферы с g ручками порождена $2g$ образующими $a_1,b_1,\dots,a_g,b_g$ с единственным соотношением $[a_1,b_1]\dots[a_g,b_g] = 1$, где $[x,y] \overset{\text{def}}{=} xyx^{-1}y^{-1}$ (этот факт новый). Фундаментальная группа бутылки Клейна порождена двумя образующими a,b и соотношением $abab^{-1} = 1$.