ЛЕКЦИЯ 11

Краткое содержание. Категория накрытий.

Рассмотрим подробнее категорию $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$; в дальнейшем будем предполагать, что топологическое пространство B линейно связно и локально односвязно. Напомним, что объектами этой категории являются тройки (E, p, x), где E — линейно связное и локально односвязное пространство, $x \in E$, а $p : E \to B$ — накрытие. Обычно обозначаем $p(x) \stackrel{\text{def}}{=} b \in B$. Морфизмы между объектами (E_1, p_1, x_1) и (E_2, p_2, x_2) категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$ — непрерывные отображения $f : E_1 \to E_2$, для которых $f(x_1) = x_2$ и $p_2 \circ f = p_1$.

Лемма 1. *Пусть $f : (E_1, p_1, x_1) \to (E_2, p_2, x_2)$ — морфизм категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$. Тогда отображение $f : E_1 \to E_2$ является накрытием.*

Доказательство. Докажем, что отображение f удовлетворяет условиям леммы 3 лекции 10. По определению категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$ пространства E_1 и E_2 линейно связны и локально односвязны. Поскольку $x_2 \in p_2^{-1}(b)$, имеем $f^{-1}(x_2) \subset f^{-1}(p_2^{-1}(b)) = p_1^{-1}(b)$. Тем самым $f^{-1}(x_2)$ — подмножество дискретного пространства и, следовательно, дискретно.

Пусть теперь $\gamma : [0, 1] \to E_2$ — путь, и $\gamma(0) = x_2$. Тогда $p_2 \circ \gamma$ — путь в B с начальной точкой b. Поскольку p_1 — накрытие, существует и единствен путь $\Gamma : [0, 1] \to E_1$ такой, что $\Gamma(0) = x_1$ и $p_2 \circ \gamma = p_1 \circ \Gamma = p_2 \circ f \circ \Gamma$. Следовательно, $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} f \circ \Gamma$ — путь в E_2, для которого $\Delta(0) = x_2$ и $p_2 \circ \Delta = p_2 \circ \gamma$. В силу единственности поднятия пути (p_2 — накрытие!) имеем $\Delta = \gamma$ — тем самым, поднятие пути γ существует.

Единственность поднятия: пусть $\Gamma_1, \Gamma_2 : [0, 1] \to E_1$ — пути, для которых $\Gamma_1(0) = \Gamma_2(0) = x_1$ и $f \circ \Gamma_1 = f \circ \Gamma_2 = \gamma$. Тогда $p_1 \circ \Gamma_1 = p_2 \circ f \circ \Gamma_1 = p_2 \circ \gamma = p_2 \circ f \circ \Gamma_2 = p_1 \circ \Gamma_2$. В силу единственности поднятия пути $p_2 \circ \gamma$ в накрытие E_1 получаем $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

Следовательно, отображение f обладает свойством поднятия пути, и согласно лемме 3 лекции 10, f — накрытие. □

Сопоставим теперь каждому объекту (E, p, x) категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$ подгруппу $\mathcal{G}(E, p, x) = p_*(\pi_1(E, x)) \subset \pi_1(B, b)$ фундаментальной группы базы.

Следствие 1 (леммы 1)**.** *Если $f : E_1 \to E_2$ — морфизм категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$, то $\mathcal{G}(E_1, p_1, x_1) \subset \mathcal{G}(E_2, p_2, x_2)$, а отображение $\mathcal{G}(f) \stackrel{\text{def}}{=} (p_2)_* f_* (p_1)_*^{-1} : \mathcal{G}(E_1, p_1, x_1) \to \mathcal{G}(E_2, p_2, x_2)$ — тавтологическое вложение.*

Доказательство. $\mathcal{G}(E_1, p_1, x_1) = (p_1)_*(\pi_1(E_1, x_1)) = (p_2)_*(f_*(\pi_1(E_1, x_1))) \subset (p_2)_*(\pi_1(E_2, x_2)) = \mathcal{G}(E_2, p_2, x_2)$. Второе утверждение следует из того, что f — накрытие и, следовательно, f_* — мономорфизм. □

Как нетрудно проверить (проделайте!), $\mathcal{G}(f_1 \circ f_2) = \mathcal{G}(f_1) \circ \mathcal{G}(f_2)$. Тем самым определен функтор $\mathcal{G}$ из категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$ в категорию $\mathbf{Subgr}_{\pi_1(\mathrm{B},\mathrm{b})}$, определенную в примере 3 лекции 10.

Теорема 1. *Для всякой подгруппы $G \subset \pi_1(B, b)$ существует объект (E, p, x) категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$ такой, что $\mathcal{G}(E, p, x) = G$.*

Доказательство. Рассмотрим универсальное накрытие E_0 с базой B. Напомним, что его точки — классы гомотопии путей $\gamma : [0, 1] \to B$, для которых $\gamma(0) = b$, то есть морфизмы $x \in \mathrm{Mor}_{\Pi_1(B)}(b, c)$ гомотопического группоида (для всевозможных $c \in B$); по определению, $p_0(x) = c$. Введем на E_0 отношение: $x \sim_G y$, если $p_0(x) = p_0(y)$ и $xy^{-1} \in G \subset \pi_1(B, b) = \mathrm{Mor}_{\Pi_1(B)}(b, b)$. Из того, что G — подгруппа, вытекает, что $\sim_G$ — отношение эквивалентности; обозначим E соответствующее фактор-пространство, а $\psi : E_0 \to E$ — отображение факторизации (которое произвольному элементу $y \in E_0$ сопоставляет класс эквивалентности $\psi(y) \in E$, содержащий y). Положим по определению $p(\psi(y)) \stackrel{\text{def}}{=} p_0(y)$, где $y \in E_0$; поскольку $y \sim_G z \Longrightarrow p_0(y) = p_0(z)$, получается корректно определенное отображение $p : E \to B$.

Другое определение отношения $\sim_G$ такое: $y \sim_G z$, где $y, z \in E_0$ тогда и только тогда, когда $p_0(y) = p_0(z) \stackrel{\text{def}}{=} a$, а класс гомотопии петли $(p_0 \circ y) \cdot (p_0 \circ z)^{-1} \in \pi_1(B, b)$ принадлежит подгруппе G. Если $U \subset B$ — односвязная тривиализующая окрестность точки a, а $\lambda : p_0^{-1}(U) \to \pi_1(B, b)$ — тривиализация универсального расслоения (ср. доказательство теоремы 1 и леммы 3 лекции 10), то получаем, что $y \sim_G z$ тогда и только тогда, когда элементы $\lambda(x)$ и $\lambda(y)$ принадлежат одному классу смежности группы $\pi_1(B, b)$ по ее подгруппе G. Теперь для произвольного элемента $\eta \in E$ рассмотрим произвольный $y \in E_0$ такой, что $\eta = \psi(y)$ (то есть произвольный представитель класса эквивалентности η) и обозначим $\mu(\eta)$ класс смежности элемента $\lambda(y)$; согласно сказанному выше он корректно определен. Поскольку $p^{-1}(U) = \psi(p_0^{-1}(U))$, получаем отображение $\mu : p^{-1}(U) \to \pi_1(B,b)/G$; как нетрудно убедиться, оно непрерывно (докажите!) и удовлетворяет определению тривиализации, из чего следует, что p — накрытие.

Пусть теперь $\gamma : [0,1] \to E$ — петля; $\gamma(0) = \gamma(1) = x \stackrel{\text{def}}{=} \psi(x_0)$. Поскольку $p(\gamma(1)) = b$, класс гомотопии петли $p \circ \gamma : [0,1] \to B$ принадлежит G; таким образом, $p_*(\pi_1(E,y)) \subset G$. С другой стороны, рассмотрим петлю $\delta : [0,1] \to B$, $\delta(0) = \delta(1) = b$, такую что $[\delta] \in G \subset \pi_1(B,b)$. По теореме о поднятии пути существует путь $\gamma : [0,1] \to E$ такой, что $\delta = p \circ \gamma$ и $\gamma(0) = y$; поскольку $[\delta] \in G$, имеем $\gamma(1) = y$. Таким образом, γ — петля, $[\delta] = p_*([\gamma])$, так что $p_*(\pi_1(E,y)) = G$. □

Теорема 2. *Пусть (E_1,p_1,x_1) и (E_2,p_2,x_2) — объекты категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$, причем $\mathcal{G}(E_1,p_1,x_1) \subset \mathcal{G}(E_2,p_2,x_2)$. Тогда между этими объектами существует морфизм f, причем единственный.*

Доказательство.

Существование морфизма f. Пусть $x \in E_1$. Поскольку E_1 линейно связно, существует путь $\gamma : [0,1] \to E_1$ такой, что $\gamma(0) = x_1$, $\gamma(1) = x$. Обозначим $\Gamma : [0,1] \to E_2$ поднятие пути $p_1 \circ \gamma : [0,1] \to B$ такое, что $\Gamma(0) = x_2$, и положим $f(x) = \Gamma(1)$. Если $\gamma' : [0,1] \to E_1$ — другой путь, соединяющий x_1 с x, а Γ' — соответствующее поднятие, то $(p_1)_*(\gamma \circ (\gamma')^{-1}) \in \mathcal{G}(E_1,p_1,x_1)$. Следовательно, $(p_1)_*(\gamma \circ (\gamma')^{-1}) \in \mathcal{G}(E_2,p_2,x_2)$, откуда вытекает, что $\Gamma(1) = \Gamma'(1)$, и отображение f определено корректно. По построению $p_1 = p_2 \circ f$; доказательство непрерывности f — упражнение.

Единственность морфизма f. Пусть $f' : E_1 \to E_2$ — другой морфизм, $f'(x_1) = x_2$. Для любого $x \in E_1$ и произвольного пути $\gamma : [0,1] \to E_1$, соединяющего x_1 с x, имеем $p_2 \circ f' \circ \gamma = p_1 \circ \gamma$. Отсюда вытекает, что $f' \circ \gamma : [0,1] \to E_2$ — поднятие пути $p_1 \circ \gamma : [0,1] \to B$. Поскольку поднятие единственно, $f' \circ \gamma = \Gamma$, откуда $f'(x) = f'(\gamma(1)) = \Gamma(1) = f(x)$. □

Следствие 2. *Если $\mathcal{G}(E_1,p_1,x_1) = \mathcal{G}(E_2,p_2,x_2)$, то объекты (E_1,p_1,x_1) и (E_2,p_2,x_2) изоморфны.*

Следствие 3. *Между любыми двумя объектами категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$ существует не более одного морфизма.*

Следствие 3 позволяет профакторизовать категорию $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$ по изоморфизмам, то есть определить категорию $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{\sim}$, объектами которой являются классы изоморфных объектов категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$. В $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{\sim}$ между объектами a и b имеется единственный морфизм, если такой морфизм существует между какими-то (и, следовательно, любыми) объектами α и β категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$, принадлежащими классам изоморфизма a и b; в противном случае морфизмов $a \to b$ не существует. Композиция морфизмов определяется очевидным образом. Тогда доказанные выше утверждения про функтор $\mathcal{G}$ можно свести воедино так: функтор $\mathcal{G}$ является эквивалентностью категорий $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{\sim}$ и $\mathbf{Subgr}_{\pi_1(\mathrm{B},\mathrm{b})}$.