ЛЕКЦИЯ 9

Краткое содержание. Накрытия: примеры, теорема о накрывающей гомотопии, следствия.

Напомним еще раз доказательство того, что $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Ключевую роль в доказательстве играет построение для каждого непрерывного отображения $\gamma : [0,1] \to S^1$ его поднятия — непрерывного отображения $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ такого, что $p \circ \Gamma = \gamma$, где $p : \mathbb{R} \to S^1$ — отображение, заданное формулой $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ (как обычно, считаем, что $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ — окружность единичного радиуса с центром в начале координат).

Обобщением этой конструкции является следующее определение. Пусть $p : E \to B$ — непрерывное отображение топологических пространств, а F — дискретное пространство. Набор данных (E, B, F, p) называется *накрытием*, если для произвольной точки $b \in B$ существует открытое множество $U \ni b$ (окрестность точки b) и непрерывное отображение $\lambda : p^{-1}(U) \to F$ такое, что отображение $\Lambda : p^{-1}(U) \to U \times F$, заданное формулой $\Lambda(x) = (p(x), \lambda(x))$, является гомеоморфизмом.

Терминология: B называется базой накрытия, E — тотальным пространством, F — стандартным слоем, p — просто накрытием, а λ — тривиализацией (в окрестности U). Поскольку Λ — гомеоморфизм, его ограничение на $p^{-1}(b)$ — также гомеоморфизм, образом которого является $\{b\} \times F$, гомеоморфный F. Отсюда вытекает, что все прообразы точек при накрытии гомеоморфны стандартному слою (то есть дискретны и имеют одинаковую мощность, равную мощности F). Поэтому при описании накрытия пространство F обычно не указывают явно.

Если в определении накрытия убрать требование, что пространство F — дискретное, то получится более общее понятие *расслоения со слоем F*.

Пример 1. Тривиальное накрытие: $E = B \times F$, $p : E \to B$ — проекция на первый сомножитель. Можно взять $U = B$ и $\lambda : B \times F \to F$ — проекция на второй сомножитель.

Пример 2. Уже упоминавшийся пример накрытия: $E = \mathbb{R}$, $B = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ — окружность единичного радиуса с центром в начале координат, F — дискретное пространство из счетного множества элементов, $p : \mathbb{R} \to S^1$ задана равенством $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. В качестве $U \ni b$ можно взять любую открытую дугу, содержащую точки b и $(1,0)$ (для удобства) не совпадающую со всей окружностью. Тогда прообраз $p^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$ — счетный набор интервалов, получающихся друг из друга сдвигом на целые числа. Каждый интервал содержит ровно одно целое число (поскольку $(1,0) \in U$); можно отождествить $F = \mathbb{Z}$ и взять в качестве $\lambda(x)$ целое число, принадлежащее тому же интервалу в $p^{-1}(U)$, что и x.

Пример 3. Пусть E — топологическое пространство, на котором действует группа G. Действие это гомоморфизм A из группы G в группу гомеоморфизмов $E \to E$. Иными словами, каждому элементу $g \in G$ сопоставляется гомеоморфизм $A_g : E \to E$, причем $A_{g_1 g_2} = A_{g_2} \circ A_{g_1}$). Действие называется точно дискретным, если для каждого $x \in E$ существует окрестность U такая, что если множества U и $A_g(U)$ имеют непустое пересечение для некоторого $g \in G$, то g — единичный элемент группы G (и, следовательно, $A_g = \mathrm{id}_E$ и $A_g(U) = U$). Пусть B — пространство орбит действия (топологическое пространство, полученное из E склеиванием точек x и $A_g(x)$ при всех $g \in G$); $p : E \to B$ — естественная проекция (сопоставляющая каждому элементу его орбиту).

В этом случае p — накрытие, слой которого F — группа G с дискретной топологией. Действительно, пусть $b \in B$ — орбита точки $x \in b \subset E$. Пусть $U \ni x$ — окрестность из определения точно дискретного действия, тогда $b \in V$, где $V \stackrel{\text{def}}{=} p(U) \subset B$ — открытое множество (по определению фактор-топологии). По определению точно дискретного действия $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{g \in G} A_g(U)$; тривиализация λ сопоставляет всякому элементу $y \in p^{-1}(V)$ элемент $g \in G$ (единственный!) такой, что $y \in A_g(U)$.

Пример 4. Накрытие примера 2 — частный случай примера 3. Здесь группа $G = \mathbb{Z}$ действует на $E = \mathbb{R}$: $A_n(t) = t + n$ для всякого $n \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$. Пространство орбит гомеоморфно S^1 (докажите!), и отображение p сопоставляет каждому действительному числу его орбиту.

Другой частный случай примера 3: группа $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ из двух элементов действует точно дискретно на сфере S^n: $A_0 = \mathrm{id}$, а A_1 переводит каждую точку сферы в диаметрально противоположную. Пространство орбит в этом случае называется n-мерным проективным пространством и обозначается $\mathbb{R}P^n$; пример 3 дает накрытие $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$, слой которого состоит из двух точек.

Теорема 1 (о накрывающей гомотопии)**.** *Пусть $p : E \to B$ — накрытие, $p(x) = b$, и пусть $h : [0,1]^n \to B$ — непрерывное отображение, для которого $h(0, \ldots, 0) = b$. Тогда существует и единственно отображение $H : [0,1]^n \to E$ (поднятие h) такое, что $p \circ H = h$ и $H(0, \ldots, 0) = x$.*

Доказательство теоремы 1 мы приведем позднее, а пока извлечем из нее следствия.

Теорема 2. *Пусть $p : E \to B$ — накрытие, и $p(x) = b$. Тогда гомоморфизм групп $p_* : \pi_1(E, x) \to \pi_1(B, b)$ — мономорфизм.*

Доказательство. Пусть $\gamma : [0,1] \to E$, $\gamma(0) = \gamma(1) = x$, — петля, класс гомотопии которой принадлежит $\operatorname{Ker} p_*$. Это означает, что петля $p \circ \gamma : [0,1] \to B$ стягиваема, т.е. существует непрерывное отображение $\zeta : [0,1]^2 \to B$ такое, что

- $\zeta(0, s) = \zeta(1, s) = b$ при всех $0 \le s \le 1$ (т.е. отображение $t \mapsto \zeta(t, s)$ является петлей с началом и концом в $b \in B$).
- $\zeta(t, 0) = p(\gamma(t))$ для всех $0 \le t \le 1$ (начальный член гомотопии — $p \circ \gamma$).
- $\zeta(t, 1) = b$ для всех $0 \le t \le 1$ (конечный член гомотопии — петля, стоящая в точке $b \in B$).

По теореме о накрывающей гомотопии отображение ζ можно поднять, т.е. существует отображение $Z : [0,1]^2 \to E$ такое, что $p(Z(t, s)) = \zeta(t, s)$ и $Z(0, 0) = x$. Три из четырех стортон квадрата $[0,1]^2$ переводятся отображением ζ в точку b — следовательно, образы этих сторон при отображении Z лежат в дискретном множестве $p^{-1}(b) \subset E$. Поскольку три стороны квадрата образуют связное множество, их образ под действием Z состоит из одной точки $Z(0, 0) = x$. Иными словами, $Z(0, s) = Z(1, s) = x$ при всех $0 \le s \le 1$ и $Z(t, 1) = x$ при всех $0 \le t \le 1$. Что касается четвертой стороны квадрата, — отображение $t \mapsto Z(t, 0)$ является поднятием петли $p \circ \gamma$, которое начинается и кончается в точке x (поскольку $Z(0, 0) = Z(1, 0) = x$). Но таким поднятием является сама петля γ, и в силу единственности получаем, что $Z(t, 0) = \gamma(t)$ при всех $0 \le t \le 1$.

Таким образом, отображение $Z : [0,1]^2 \to E$ представлеят собой гомотопию с фиксированными концами петли γ в петлю, отображающую весь отрезок $[0,1]$ в точку $x \in E$. Тем самым класс гомотопии петли γ — единичный элемент группы $\pi_1(E, x)$. □

Отступление: некоторые сведения из элементарной теории групп. Доказательства приведенных ниже теорем — упражнения.

Пусть G — группа, операцию в которой будем называть умножением. Подмножество $H \subset G$ называется подгруппой, если оно замкнуто относительно умножения и взятия обратного элемента: если $g_1, g_2 \in H$, то $g_1 g_2 \in H$, а также если $g \in H$,то $g^{-1} \in H$. Как следствие, любая подгруппа содержит единицу группы G: $\mathbf{1}_G = gg^{-1}$. Подгруппа H называется нормальной, если $yxy^{-1} \in H$ для любого $x \in H$ и любого $y \in G$.

Пример G.1. Если группа G коммутативна, то любая ее подгруппа нормальна.

Пример G.2. $G = S_3$ (группа перестановок трех элементов, т.е. взаимно однозначных отображений множества $\{1, 2, 3\}$ в себя), подгруппа $H = \{1, (123), (132)\}$ (1 — тождественная перестановка, (123) — цикл, переводящий $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$, (132) — аналогично. Эта группа нормальна, что можно, в принципе, проверить перебором. Обобщение этого примера: $G = S_n$, а $H = A_n$ (группа, состоящая из всех четных перестановок). Как известно, $\operatorname{sign}(xy) = \operatorname{sign}(x)\operatorname{sign}(y)$, где $x, y \in S_n$ — перестановки, а $\operatorname{sign}(x) \in \{1, -1\}$ — четность перестановки x. Имеем $1 = \operatorname{sign}(1) = \operatorname{sign}(yy^{-1}) = \operatorname{sign}(y)\operatorname{sign}(y^{-1})$, откуда $\operatorname{sign}(y^{-1}) = \operatorname{sign}(y)$ для любой перестановки y. Следовательно, $\operatorname{sign}(yxy^{-1}) = \operatorname{sign}(y)\operatorname{sign}(x)\operatorname{sign}(y^{-1}) = \operatorname{sign}^2(y)\operatorname{sign}(x) = \operatorname{sign}(x)$, откуда вытекает, что A_n — нормальная подгруппа.

Подгруппа $H = \{1, (12)\} \subset S_3$ не нормальна, т.к. $(13)(12)(13)^{-1} = (13)(12)(13) = (23) \notin H$. Здесь символом (ij) обозачается перестановка (транспозиция), отображающая $i \mapsto j \mapsto i$, а остальные элементы оставляющая на месте.

Пример G.3. Пусть G — группа движений плоскости, $H_a \subset G$ — подгруппа. состоящая из движений, точку a в себя. $H_a \subset G$ не нормальна: если $x \in H_a$, $y \in G$, то $yxy^{-1} \in H_{y(a)}$ (проверьте!), а группы H_a и H_b при $a \ne b$ не совпадают.

Подгруппа $T \subset G$, состоящая из параллельных переносов, нормальна (доказательство — упражнение).

Введем на группе G два отношения: $x \sim_l y$ означает $xy^{-1} \in H$, а $x \sim_r y$ означает $x^{-1}y \in H$.

Теорема G.1. *$\sim_l$ и $\sim_r$ — отношения эквивалентности. Подгруппа H нормальна тогда и только тогда, когда эти отношения совпадают: $x \sim_l y$ тогда и только тогда, когда $x \sim_r y$.*

Классы эквивалентности по отношениям $\sim_l$ и $\sim_r$ называются, соответственно, левыми и правыми смежными классами по подгруппе H. Левый смежный класс по подгруппе H, содержащий элемент $y \in G$, обозначается yH и состоит из всех элементов $yh, h \in H$. Правый смежный класс обозначаеся Hy и состоит из всех элементов $hy, h \in H$. Из теоремы вытекает, что подгруппа H нормальна тогда и только тогда, когда $yH = Hy$ для всех $y \in G$.

Теорема G.2 (о гомоморфизме). *1) Пусть $f : G \to G'$ — гомоморфизм групп. Тогда его ядро $\operatorname{Ker}(f) \stackrel{def}{=} \{x \in G \mid f(x) = 1\}$ является нормальной подгруппой в G.*

2) Если подгруппа $H \subset G$ нормальна, то существует гомоморфизм $f : G \to G'$ такой, что $\operatorname{Ker}(f) = H$. Среди всевозможных гомоморфизмов f имеется единственный эпиморфизм (отбражение, образ которого — вся группа G'), в этом случае G' обозначается G/H и называется фактор-группой G по подгруппе H.

3) Если $f : G \to G/H$ — эпиморфизм, для которого $\operatorname{Ker}(f) = H$, и $f(y) = a \in G/H$, то прообраз $f^{-1}(a)$ — смежный класс yH. Тем самым элементы группы G/H находятся во взаимно однозначном соответствии со смежными классами по подгруппе H.

Из теоремы G.2 вытекает, что гомоморфизм групп $f : G_1 \to G_2$ с тривиальным ядром (мономорфизм) переводит различные элементы группы G_1 в различные и представляет собой изоморфизм G_1 и подгруппы $f(G_1) \subset G_2$. Таким образом, $\pi_1(E, x)$ изоморфна образу $p_*(\pi_1(E, x)) \overset{\text{def}}{=} G \subset p_*(B, b)$. Пусть $\gamma : [0, 1] \to B$ — петля. $\gamma(0) = \gamma(1) = b$. Согласно теореме о накрывающей гомотопии при $n = 1$ существует единственный путь $\Gamma : [0, 1] \to E$, для которого $p \circ \Gamma = \gamma$ и $\Gamma(0) = x$. Рассмотрим точку $\Gamma(1) \in p^{-1}(\gamma)$. В силу той же теоремы при $n = 2$ эта точка непрерывно меняется при гомотопии пути γ, а поскольку множество $p^{-1}(\gamma)$ дискретно — не меняется вовсе. Следовательно, точка $\Gamma(1) \in p^{-1}(b)$ зависит только от класса гомотопии $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$; обозначим $\Gamma(1) \overset{\text{def}}{=} \xi([\gamma])$.

Теорема 3. *Пусть $p : E \to B$ — накрытие. Равенство $\xi(\alpha_1) = \xi(\alpha_2)$ имеет место тогда и только тогда, когда α_1 и α_2 принадлежат одному и тому же левому смежному классу по подгруппе $p_*(\pi_1(E, x))$, т.е. если $\alpha_1\alpha_2^{-1} \in p_*(\pi_1(E, x)) \subset \pi_1(B, b)$. Если пространство E линейно связно, то отображение ξ является взаимно однозначным соответствием между $p^{-1}(b)$ и множеством (левых) смежных классов $\pi_1(B, b)/p_*(\pi_1(E, x))$.*

Доказательство. Пусть кривые γ_1 и γ_2 — представители классов α_1 и α_2, а Γ_1 и Γ_2 — их поднятия. Если $\xi(\alpha_1) = \Gamma_1(1) = \Gamma_2(1) = \xi(\alpha_2)$, то $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2^{-1}$ — петля в пространстве E. Тогда $\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1} = p \circ (\Gamma_1 \cdot \Gamma_2^{-1})$, откуда $\alpha_1\alpha_2^{-1} \in p_*(\pi_1(E, x))$.

Обратно, пусть $\alpha_1\alpha_2^{-1} \in p_*(\pi_1(E, x))$, и пусть Γ — поднятие петли $\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}$. В силу единственности поднятия (уточните, как именно она используется!) Γ — петля, поэтому $\xi_1(\alpha_1) = \Gamma(1/2) = \xi(\alpha_2)$.

Отсюда вытекает, что отображение $\xi : \pi_1(B, b)/p_*(\pi_1(E, x)) \to p^{-1}(b)$ корректно определено и инъективно. Сюръективность: пусть $y \in p^{-1}(b)$. Поскольку E линейно связно, существует путь $\Gamma : [0, 1] \to E$, для которого $\Gamma(0) = x$ и $\Gamma(1) = y$. Тогда $y = \xi([\gamma])$, где $\gamma = p \circ \Gamma$. □