ЛЕКЦИЯ 4

Краткое содержание. Компактность.

Множество $\{U_\alpha\}$ подмножеств $U\alpha \subset X$ топологического пространства X называется открытым покрытием X, если все U_α открыты и $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$.

Топологическое пространство X называется *компактным*, или *компактом*, если для всякого его открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ найдется конечный набор индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ такой, что $U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N} = X$.

Пример 1. Топологическое пространство $\mathbb{R}$ компактным не является. Действительно, если $U_n \stackrel{\text{def}}{=} (-n, n)$, где $n = 1, 2, \dots$, то $\bigcup_{n=1}^\infty U_n = \mathbb{R}$. Но $U_1 \subset U_2 \subset \dots$, так что объединение конечного числа U_n совпадает с самым большим из них и не совпадает с $\mathbb{R}$.

То же самое покрытие доказывает чуть более общее утверждение: никакое неограниченное подмножество $X \subset \mathbb{R}$ не может быть компактным.

Теорема 1. *Отрезок* $[0, 1]$ *компактен.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие $[0, 1]$. Рассмотрим множество $T \subset [0, 1]$ точек t таких, что отрезок $[0, t]$ можно покрыть конечным объединением множеств U_α; наша задача доказать, что $1 \in T$. Заметим сразу, что если $t \in T$ и $0 \le s \le t$, то, очевидно, $s \in T$, так что утверждение теоремы эквивалентно $T = [0, 1]$.

Поскольку $\{U_\alpha\}$ — покрытие, существует α_0 такое, что $0 \in \alpha_0$. Множество $U_{\alpha_0} \subset [0, 1]$ открыто — следовательно, оно содержит полуинтервал $[0, p)$ для некоторого $p > 0$. Отсюда сразу вытекает, что $[0, p) \subset T$ и, в частности, T непусто.

Поскольку T непусто, оно имеет точную верхнюю грань $\tau = \sup T$. Докажем, что $\tau \in T$. Поскольку $\tau \in [0, 1]$, существует индекс β такой, что $\tau \in U_\beta$. Множество U_β открыто и, следовательно, содержит интервал $(p, q) \ni \tau$ или (в случае если $\tau = 1$) полуинтервал $(p, \tau]$. Из определения точной верхней грани следует, что существует точка $t \in T$, для которой $p < t \le \tau$, откуда $t \in U_\beta$. Отрезок $[0, t]$ покрывается конечным набором множеств $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}$, откуда вытекает, что отрезок $[0, \tau]$ покрывается множествами $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}$ и U_β — следовательно, $\tau \in T$.

Если теперь $\tau < 1$, то $(\tau + q)/2 < q < 1$ (напомним, $(p, q) \subset U_\beta \subset [0, 1]$ и $\tau \in (p, q)$). Следовательно, отрезок $[0, (\tau + q)/2]$ покрывается множествами $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}$ и U_β — таким образом, $(\tau + q)/2 \in T$. Но $\tau < (\tau + q)/2$, что противоречит равенству $\tau = \sup T$.

Таким образом, $\tau = 1$, $\tau \in T$ и теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть X — компактное топологическое пространство, а $Y \subset X$ замкнуто. Тогда Y компактно (в топологии подмножества).*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие Y. Поскольку $U_\alpha \subset Y$ открыто, существует открытое $V_\alpha \subset X$ такое, что $U_\alpha = Y \cap V_\alpha$. Множество $W \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus Y$ по условию открыто; таким образом, $\{V_\alpha\} \cup \{W\}$ — открытое покрытие X (почему?). Поскольку X компактно, существуют $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ такие, что $X = V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_N} \cup W$. Но тогда $Y = U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N}$. □

Топологическое пространство X называется хаусдорфовым, если для любых двух точек $a, b \in X$, $a \ne b$, существуют открытые множества $U, V \subset X$ такие, что $a \in U$, $b \in V$ и $U \cap V = \varnothing$.

Пример 2. Пространство $\mathbb{R}^n$ при любом n хаусдорфово (в качестве U и V можно взять, например, шары достаточно малого радиуса с центрами в a и b — уточните!). Пространство из двух точек $\{a, b\}$, открытыми множествами в котором являются $\varnothing$, $\{b\}$ и $\{a, b\}$, не хаусдорфово.

Теорема 3. *Пусть X — хаусдорфово пространство, а $Y \subset X$ компактно (в топологии подмножества). Тогда Y замкнуто.*

Доказательство. Для произвольных точек $a \in Y$ и $b \in X \setminus Y$ рассмотрим открытые множества из определения хаусдорфовости; назовем их $U_{ab} \ni a$ и $V_{ab} \ni b$ и обозначим $W_{ab} \stackrel{\text{def}}{=} Y \cap U_{ab}$. Зафиксируем точку $b \in X \setminus Y$. Совокупность множеств $\{W_{ab} \mid a \in Y\}$ — открытое покрытие компакта Y, и следовательно, существуют $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ такие, что $Y = W_{\alpha_1 b} \cup \dots \cup W_{\alpha_N b}$, то есть $Y \subseteq U_{\alpha_1 b} \cup \dots \cup U_{\alpha_N b}$. Отсюда следует, что множество $V_b \stackrel{\text{def}}{=} V_{\alpha_1 b} \cap \dots \cap V_{\alpha_N b}$ не пересекается с Y, т.е. $V_b \subset X \setminus Y$. Множество V_b открыто (конечное пересечение открытых множеств) и $b \in V_b$. Следовательно, $X \setminus Y = \bigcup_{b \in X \setminus Y} V_b$ — открыто, а Y замкнуто. □

Следствие 1. *Подмножество $Y \subset \mathbb{R}$ компактно (в топологии подмножества) тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.*

Доказательство. Пусть вначале $X \subset \mathbb{R}$ ограничено и замкнуто. Из ограниченности вытекает, что $X \subset [a, b]$ для некоторых $a, b \in \mathbb{R}$. Отрезок $[a, b]$ компактен по теореме 3 (все отрезки гомеоморфны), а замкнутость $X \subset \mathbb{R}$ и $X \subset [a, b]$ означает одно и то же (почему?). Тогда X компактно по теореме 4.

Пусть, наоборот, $X \subset \mathbb{R}$ компактно. Поскольку $\mathbb{R}$ хаусдорфово, X замкнуто по теореме 5. Ограниченность X была доказана в примере 13. □

Теорема 4. *Пусть X компактно, а $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда образ $f(X) \subset Y$ компактен.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие образа $f(X)$. Тогда $V_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(U_\alpha)$ образуют открытое покрытие X. В силу компактности $X = V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_N}$, откуда $f(X) = U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N}$ компактен. □

Следствие 2. *Пусть X — компакт, а $f : X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда f ограничена и достигает своего наибольшего и наименьшего значения: существуют $c_1, c_2 \in X$ такие, что $f(c_1) \le f(x) \le f(c_2)$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Образ $f(X)$ компактен (теорема 6) и, следовательно, ограничен (следствие 7). Тем самым существует $M \stackrel{\text{def}}{=} \sup f(X)$. Компакт $f(X) \subset \mathbb{R}$ замкнут (теорема 5) и, следовательно, $M \in f(X)$ (докажите!). Это означает, что $M = f(c_2)$ для некоторго $c_2 \in X$ и $f(x) \le M$ для всех $x \in X$. Существование c_1 доказывается аналогично. □

Теорема 5. *Декартово произведение $X \times Y$ компактов — компакт.*

Доказательство. Пусть $X \times Y = \bigcup_\alpha U_\alpha$, где X, Y компактны, а все $U_\alpha \subset X \times Y$ открыты. По определению топологии декартова произведения для всякого α и произвольной точки $a \in U_\alpha$ существуют открытые множества $P_{a,\alpha} \subset X$ и $Q_{a,\alpha} \subset Y$ такие, что $a \in P_{a,\alpha} \times Q_{a,\alpha} \subset U_\alpha$. Тогда $X \times Y = \bigcup_\alpha \bigcup_{a \in U_\alpha} P_{a,\alpha} \times Q_{a,\alpha}$. Для произвольного $b \in X$ множество $\{b\} \times Y$ гомеоморфно Y и, следовательно, компактно. Тогда найдется конечный набор индексов $\alpha_{1,b}, \dots, \alpha_{N_b,b}$ такой, что $\{b\} \times Y \subset P_{b,\alpha_{1,b}} \times Q_{b,\alpha_{1,b}} \cup \dots \cup P_{b,\alpha_{N_b,b}} \times Q_{b,\alpha_{N_b,b}}$. Рассмотрим теперь множество $A_b = Q_{b,\alpha_{1,b}} \cap \dots \cap Q_{b,\alpha_{N_b,b}}$. Множество A_b открыто (конечное пересечение открытых), и $b \in A_b$ — следовательно, $\bigcup_b A_b = X$. В силу компактности X найдется конечный набор точек $b_1, \dots, b_M$ такой, что $X = A_{n_1} \cup \dots \cup A_{b_M}$. Следовательно, $X \times Y = \bigcup_{i=1}^M \bigcup_{j=1}^{N_{b_i}} P_{b_i,\alpha_{j,b_i}} \times Q_{b_i,\alpha_{j,b_i}}$. Поскольку $P_{b_i,\alpha_{j,b_i}} \times Q_{b_i,\alpha_{j,b_i}} \subset U_{\alpha_{j,b_i}}$, множество $X \times Y$ покрыто конечным числом множеств U_α, то есть компактно. □

Теорема 6. *Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное взаимно однозначное отображение, X компактно, а Y хаусдорфово. Тогда f — гомеоморфизм (в частности, Y компактно, а X хаусдорфово).*

Упражнение 1. Необходимо доказать непрерывность отображения $f^{-1} : Y \to X$ (оно существует, т.к. f взаимно однозначно). Пусть $U \subset X$ открыто, тогда $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U) \subset Y$. Множество $Z \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus Y$ замкнуто и, согласно теореме 4, компактно. В силу взаимной однозначности f имеем $Y \setminus f(U) = f(Z)$. По теореме 6 множество $f(Z) \subset Y$ компактно; по теореме 5 оно замкнуто. Отсюда вытекает, что $f(U) = Y \setminus f(Z)$ открыто, то есть f^{-1} непрерывно.

Пример 3. Теорема 8 позволяет пропустить вторую часть доказательства того, что отрезок со склеенными концами гомеоморфен окружности. (См. лекцию 3.) Действительно, отображение $f : [0, 1]/(0 \sim 1) \to S^1$, заданное формулами $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, непрерывно, поскольку синус и косинус — непрерывные функции (см. в лекции 3 подробное доказательство). Нетрудно видеть, что f взаимно однозначно. Пространство $[0, 1]/(0 \sim 1)$ — образ компакта $[0, 1]$ при "склеивающем отображении" $p : [0, 1] \to [0, 1]/(0 \sim 1)$. Окружность $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ ограничена (очевидно) и замкнута: $S^{-1} = q^{-1}(\{1\})$, где $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — многочлен $q(x, y) = x^2 + y^2$. Многочлен q непрерывен, одноточечное множество $\{1\} \subset \mathbb{R}$ замкнуто.

Теперь из теоремы 8 вытекает, что f — гомеоморфизм.