ЛЕКЦИЯ 3

Краткое содержание. Прямое произведение и фактор-топология. Связность, линейная связность.

1. Операции над топологическими пространствами (продолжение)

В лекции 2 были рассмотрены два способа получать новые топологические пространства из уже известных — подмножество и несвязное объединение. Рассмотрим еще несколько способов.

3. Прямое (или декартово) произведение Пусть X_1, X_2 — топологические пространства, и $X = X_1 \times X_2$ — декартово произведение, то есть множество пар $\{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$. Назовем множество $U \subset X$ открытым, если $U = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} V_\alpha \times W_\alpha$, где $V_\alpha \subset X_1$ и $W_\alpha \subset X_2$ — некоторые открытые подмножества, а множество индексов $\mathfrak{A}$ произвольно.

Лемма 1. *Таким образом в X вводится структура топологического пространства.*

Доказательство. $\varnothing = \varnothing \times X_2$ и $X = X_1 \times X_2$ открыты. Объединение открытых множеств открыто, поскольку открытое множество само определяется как (произвольное) объединение.

Пусть теперь $U_1 = \bigcup_\alpha V_\alpha^{(1)} \times W_\alpha^{(1)}$ и $U_2 = \bigcup_\beta V_\beta^{(2)} \times W_\beta^{(2)}$ открыты. Тогда

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\alpha,\beta} (V_\alpha^{(1)} \times W_\alpha^{(1)}) \cap (V_\beta^{(2)} \times W_\beta^{(2)}) = \bigcup_{\alpha,\beta} (V_\alpha^{(1)} \cap V_\beta^{(2)}) \times (W_\alpha^{(1)} \cap W_\beta^{(2)})$$

— открыто. $\square$

Лемма 2. *Пусть $f : X \to Y$ и $g : X \to Z$ — отображения топологических пространств, и отображение $h : X \to Y \times Z$ задано формулой $h(x) = (f(x), g(x))$, $x \in X$. Тогда отображение h непрерывно тогда и только тогда, когда f и g непрерывны.*

Доказательство — упражнение.

Пример 1. Плоскость $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ с топологией прямого произведения. Непустое множество $U \subset \mathbb{R}^2$ открыто, если вместе с любой точкой $a = (a_1, a_2) \in U$ содержит прямоугольник $(a_1 - \varepsilon_1, a_1 + \varepsilon_1) \times (a_2 - \varepsilon_2, a_2 + \varepsilon_2)$ для некоторых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Как нетрудно видеть (докажите!), это условие эквивалентно тому, что U вместе с любой своей точкой $a = (a_1, a_2) \in U$ содержит круг $\Omega_\varepsilon(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < \varepsilon^2\}$ с центром a некоторого радиуса $\varepsilon > 0$.

Декартова степень $\mathbb{R}^n$ определяется по индукции: $\mathbb{R}^n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

4. Фактор-топология Пусть X — топологическое пространство, на котором фиксировано разбиение на непересекающиеся подмножества (не обязательно открытые или замкнутые): $X = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$, где $X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$. Множество индексов $\mathfrak{A}$ можно наделить топологией следующим образом: множество $B \subset \mathfrak{A}$ открыто тогда и только тогда, когда объединение $\bigcup_{\alpha \in B} X_\alpha \subset X$ открыто.

Лемма 3. *Таким образом в $\mathfrak{A}$ определена топология.*

Доказательство. Множества $\varnothing$ и $\mathfrak{A}$ открыты, поскольку $\bigcup_{\alpha \in \varnothing} X_\alpha = \varnothing$ и $\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha = X$ открыты. Если B_β открыто для произвольного $\beta \in \mathfrak{B}$, то $\bigcup_{\alpha \in \bigcup_{\beta \in \mathfrak{B}} B_\beta} X_\alpha = \bigcup_{\beta \in \mathfrak{B}} \bigcup_{\alpha \in B_\beta} X_\alpha$ является объединением открытых множеств и, следовательно, открыто — значит, и множество индексов $\bigcup_{\beta \in \mathfrak{B}} B_\beta$ открыто. Для пересечения аналогично (доделайте!). $\square$

В описанном случае канонически определено отображение $p : X \to \mathfrak{A}$ (факторизация), сопоставляющее каждой точке $x \in X$ индекс $\alpha \in \mathfrak{A}$ такой, что множество $x \in X_\alpha$ — по условию, α существует и единственно.

Теорема 1. *Отображение p непрерывно. Отображение $f : \mathfrak{A} \to Y$ в произвольное топологическое пространство непрерывно тогда и только тогда, когда $f \circ p : X \to Y$ непрерывно.*

Доказательство. Пусть $U \subset Y$ открыто. Множество $f^{-1}(U) \subset \mathfrak{A}$ открыто тогда и только тогда, когда открыто множество $\bigcup_{\beta \in f^{-1}(U)} X_\beta = p^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ p)^{-1}(U) \subset X$. $\square$

Пример 2. Пусть $X = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ — квадрат на плоскоскости; в $\mathbb{R}^2$ — топология прямого произведения, в X — топология подмножества (способ 2 в лекции 2). Рассмотрим подмножества $X_t = \{(0,t),(1,1-t)\}$ для всех $0 \le t \le 1$ и $X_{s,t} = \{(s,t)\}$ для всех $0 < s < t$, $0 \le t \le 1$. Очевидно, $X = \bigcup_t X_t \cup \bigcup_{s,t} X_{s,t}$, причем различные множества $X_t, X_{s,t}$ не пересекаются. Фактор-пространство X по такому разбиению называется лентой Мебиуса; говорят "лента Мебиуса получается склеиванием точек на левой стороне квадрата с симметричными им точками на правой стороне; точки, не лежащие на левой и правой стороне квадрата, ни с чем не склеиваются".

Пример 3. Пусть $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$ с топологией подмножества. Положим $X_t \stackrel{\text{def}}{=} \{t\}$ при всех $0 < t < 1$ и $X_a \stackrel{\text{def}}{=} \{0,1\}$. Фактор-пространство Z, соответствующее этому разбиению, получено, неформально говоря, склеиванием концов 0 и 1 отрезка (внутренние точки ни с чем не склеиваются). "Склеивающее отображение" $p : [0,1] \to Z$ задается формулой $p(0) = p(1) = a$ и $p(t) = t$ при всех $0 < t < 1$.

Пусть теперь $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ — окружность (с топологией подмножества $\mathbb{R}^2$, которое, в свою очередь, наделено топологией произведения). Рассмотрим отображение $f : Z \to Y$, заданное правилом $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ при $0 < t < 1$ и $f(a) = (1,0)$. Нетрудно видеть, что f — взаимно однозначное соответствие.

Докажем непрерывность f. Композиция $h \stackrel{\text{def}}{=} f \circ p : [0,1] \to Y$ задается формулой $h(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ для всех $t \in [0,1]$. Отображения $[0,1] \to \mathbb{R}$, заданные формулами $t \mapsto \cos 2\pi t$ и $t \mapsto \sin 2\pi t$, непрерывны (доказательство см. в курсе анализа). Из леммы 2 вытекает, что отображение $H : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, заданное формулой $H(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, непрерывно. Образ отображения H лежит в окружности $Y \subset \mathbb{R}^2$, причем $H(t) = h(t)$ при всех $t \in [0,1]$ (напомним, что h это отображение $[0,1] \to Y$). Из определения топологии подмножества (см. лекцию 2) вытекает, что если H непрерывно, то и h непрерывно (проверьте!). Из теоремы 1 следует теперь, что $f : Z \to Y$ непрерывно.

Докажем теперь, что $g \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1} : Y \to Z$ непрерывно. Из определения фактор-топологии следует, что множество $U \subset Z$ открыто тогда и только тогда, когда $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$, где каждое множество U_α это либо интервал $(p.q)$, $0 < p < q < 1$, либо множество вида $(0,p) \cup (q,1) \cup \{a\}$. Поскольку $g^{-1}(\bigcup_\alpha U_\alpha) = \bigcup_\alpha g^{-1}(U_\alpha)$ (почему?), достаточно доказать, что $g^{-1}(U_\alpha) \subset Y$ открыто для обоих типов множеств U_α. Как нетрудно проверить, в обоих случаях прообраз $g^{-1}(U_\alpha) \subset Y$ — дуга окружности (без концов). Дуга является пересечением окружности Y и правильно подобранного прямоугольника $(p_1,q_1) \times (p_2,q_2) \subset \mathbb{R}^2$ на плоскости (подберите!) и, тем самым, открыта по определению топологии подмножества.

Тем самым доказано, что $g = f^{-1}$ непреывно, а f, тем самым, — гомеоморфизм. Таким образом, отрезок со склеенными концами гомеоморфен окружности.

2. Связность и линейная связность

Топологическое пространство X называется *несвязным*, если существуют непустые открытые подмножества $U, V \subset X$ такие, что $U \cap V = \varnothing$, $U \cup V = X$. Если таких множеств не существует, то X называется связным. Эквивалентное (почему?) определение: пространство X связно, если только подмножества $\varnothing \subset X$ и $X \subset X$ являются открытыми и замкнутыми одновременно.

Пример 4. Отрезок $[0,1]$ (с топологией подмножества $\mathbb{R}$) связен. Для доказательства нам потребуется следующая лемма, которая будет доказана позднее в курсе анализа:

Лемма 4. *Для всякого ограниченного сверху множества $M \subset \mathbb{R}$ действительных чисел существует точная верхняя грань $a \stackrel{def}{=} \sup M$, т.е. такое число a, что $m \le a$ для всякого $m \in M$, но для всякого $\varepsilon > 0$ существует $m \in M$ такое, что $m > a - \varepsilon$.*

Доказательство связности отрезка. Предположим, что отрезок несвязен, и $[0,1] = U \cup V$ — требуемое разбиение на открытые подмножества; без ограничения общности считаем, что $1 \in V$ (если это неверно, то $U \longleftrightarrow V$). Пусть $a = \sup U$; докажем, что $a \in V$. Если $a = 1$, то $a \in V$ по условию; если же $a < 1$ и $a \in U$, то в силу открытости U существует $\varepsilon > 0$ такое, что интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U \subset [0,1]$. Отсюда вытекает, что $a + \varepsilon/2 \in U$; но $a + \varepsilon/2 > a$, что противоречит понятию точной верхней грани.

Тем самым $a \in V$. Очевидно, $a > 0$ (почему?). Поскольку множество V открыто и содержит a, существует $\varepsilon > 0$ такое, что $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset V$. Но тогда интервал $(a-\varepsilon, a)$ не содержит точек множества U, что опять-таки противоречит понятию точной верхней грани.

Полученное противоречие доказывает связность отрезка. □

Теорема 2. *Образ связного пространства при непрерывном отображении связен.*

Доказательство. Пусть X связно, $f : X \to Y$ непрерывно, $Z = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$. Пусть Z несвязно: $Z = U \cup V$, где U и V открыты в топологии подмножества, $U, V \neq \varnothing$, но $U \cap V = \varnothing$. Иными словами, $U = Z \cap U'$, $V = Z \cap V'$, где $U', V' \subset Y$ открыты, $U' \cap V' \cap Z = \varnothing$ и $Z \subset U' \cup V'$. Пусть $W_1 = f^{-1}(U) = f^{-1}(U') \subset X$ (напомним, что образы всех точек $x \in X$ лежат в Z), $W_2 = f^{-1}(V) = f^{-1}(V') \subset X$.

Множества W_1, W_2 открыты (поскольку $f : X \to Y$ непрерывно), не пересекаются (поскольку их образы в Z — множества U и V — не пересекаются) и $W_1 \cup W_2 = X$ (поскольку для любого $x \in X$ имеем либо $f(x) \in U$, либо $f(x) \in V$). Поскольку X связно, одно из множеств W_i пусто: либо $W_1 = \varnothing$, либо $W_2 = \varnothing$. Пусть верно первое; рассмотрим тогда произвольную точку $b \in U$. Поскольку множество $U \subset f(X)$, точка b имеет прообраз (возможно, не один) c при отображении f: $f(c) = b$. Но тогда $c \in f^{-1}(U) = W_1$, которое тем самым непусто. Полученное противоречие показывает, что $b \in U$ не существует, и тем самым $U = \varnothing$. Если же верно второе ($W_2 = \varnothing$), то аналогично получаем $V = \varnothing$. Это доказывает связность Z. $\square$

Следствие 1 (теорема о промежуточном значении)**.** *Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $a_0 = f(0), a_1 = f(1)$, $c \in [a_0, a_1]$. Тогда существует точка $t \in [0,1]$ такая, что $f(t) = c$.*

Доказательство. Пусть это не так: $Y = f([0,1])$ и $c \notin Y$, где $a_0 \le c \le a_1$. Множества $U = Y \cap (-\infty, c)$ и $V = Y \cap (c, +\infty)$ открыты (в топологии подмножества $Y \subset \mathbb{R}$), не пересекаются, непусты ($a_0 \in U$, $a_1 \in V$), и их объединение это $Y \cap (\mathbb{R} \setminus \{c\}) = Y$. Тем самым множество Y несвязно, хотя является образом связного множества $[0,1]$ — противоречие. $\square$

Следствие 2 (следствия 1 — теорема Брауэра в размерности 1)**.** *Непрерывное отображение $f : [0,1] \to [0,1]$ имеет неподвижную точку — существует $c \in [0,1]$ такое, что $f(c) = c$.*

Доказательство. Пусть $g(t) = t - f(t)$. Тогда $a_0 \stackrel{\text{def}}{=} g(0) \le 0$, $a_1 \stackrel{\text{def}}{=} g(1) \ge 0$ — следовательно, $0 \in [a_0, a_1]$. Согласно следствию 1, существует $c \in [0,1]$ такое, что $g(c) = 0$, то есть $f(c) = c$. $\square$

Топологическое пространство X называется линейно связным, если для любых двух его точек $a, b \in X$ существует соединяющая их кривая, т.е. непрерывное отображение $\gamma : [0,1] \to X$, для которого $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$.

Теорема 3. *1) Линейно связное пространство связно.*
2) Образ линейно связного пространства при непрерывном отображении линейно связен.

Доказательство. 1. Пусть X линейно связно, но не связно — $X = U \cup V$, где U и V открыты, непусты и не пересекаются. Пусть $a \in U$ и $b \in V$, и $\gamma : [0,1] \to X$ — кривая, соединяющая a и b. Тогда $\gamma^{-1}(U) \subset [0,1]$ и $\gamma^{-1}(V) \subset [0,1]$ открыты (поскольку γ непрерывна), непусты (первое содержит 0, второе 1), и их объединение — весь отрезок $[0,1]$. Это противоречит связности отрезка (пример 4).

2. Пусть $f : X \to Y$, и $a = f(x)$, $b = f(y)$ — произвольные точки образа $f(X) \subset Y$. В силу линейной связности X существует кривая $\delta : [0,1] \to X$, для которой $\delta(0) = x$, $\delta(1) = y$. Определим кривую $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} f \circ \delta : [0,1] \to Y$. Она непрерывна (композиция непрерывных отображений), и $\delta(0) = f(x) = a$, $\delta(1) = b$. Следовательно, $f(X)$ линейно связно. $\square$

Пример 5. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$. Кривая $\gamma(t) = tb + (1-t)a$ непрерывна, и $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$. Тем самым прямая линейно связна и, следовательно, связна. Аналогично доказывается, что любой интервал $(p, q) \subset \mathbb{R}$ связен.

Множество $\mathbb{R} \setminus \{c\} = (-\infty, c) \cup (c, +\infty)$ несвязно (для всякого $c \in \mathbb{R}$) и, следовательно, не гомеоморфно $\mathbb{R}$.

Пример 6. Пусть $a, b \in S^1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ (окружность). Она является образом прямой $\mathbb{R}$ при непрерывном отображении $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Согласно теореме 3, окружность линейно связна и, следовательно, связна. Для произвольной точки $c = (\cos t, \sin t) \in S^1$ дополнение $S^1 \setminus \{c\}$ является образом интервала $(t, t + 2\pi) \subset \mathbb{R}$ при том же самом отображении f. Интервал линейно связен (пример 5) — следовательно, $S^1 \setminus \{c\}$ также линейно связно и связно.

Пример 7. Из примеров 5 и 6 следует, что прямая и окружность не гомеоморфны. Действительно, пусть $h : \mathbb{R} \to S^1$ — гомеоморфизм. Тогда для произвольной точки $c \in \mathbb{R}$ ограничение $h|_{\mathbb{R} \setminus \{c\}} : \mathbb{R} \setminus \{c\} \to S^1 \setminus \{h(c)\}$ также является гомеоморфизмом (докажите!). Но $\mathbb{R} \setminus \{c\}$ несвязно, а $S^1 \setminus \{h(c)\}$ связно — противоречие. Аналогично доказывается, что окружность не гомеоморфна отрезку, интервалу и полуинтервалу, только в качестве c нужно выбирать внутреннюю точку.

Утверждение, обратное к пункту 1 теоремы 3, неверно: связное пространство может быть линейно несвязным.

Пример 8. Пусть $X = A \cup B \subset \mathbb{R}^2$, где $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ — окружность единичного радиуса с центром в начале координат, а $B = \{b(t) \mid t \ge 0\}$, где $b(t) = (\frac{t}{t+1} \cos t, \frac{t}{t+1} \sin t)$, — спираль, начинающаяся в начале координат ($b(0) = (0,0)$), целиком лежащая в круге, ограниченном окружностью A ($|b(t)| = \frac{t}{t+1} < 1$, и приближающаяся к окружности A, когда $t \to \infty$ (при этом $|b(t)| \to 1$).

Пространство X (с топологией подмножества $\mathbb{R}^2$) связно, но линейно несвязно. Доказательство — задача (см. план решения в листке 3).