ЛЕКЦИЯ 2

Краткое содержание. Топологические пространства, непрерывные отображения, гомеоморфизм.

1. Топологические пространства

Определение. *Топологическим пространством* называется множество X, в котором задан набор подмножеств $U \subset X$, называемых *открытыми* (а сам набор называется *топологией*), обладающий следующими свойствами:

- Подмножества $\varnothing$ и X являются открытыми.
- Если $\{U_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — произвольный набор открытых подмножеств (множество индексов $\mathfrak{A}$ может быть конечным или бесконечным любой мощности), то их объединение $\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} U_\alpha$ также является открытым.
- Если U_1, U_2 — открытые подмножества, то их пересечение $U_1 \cap U_2$ также является открытым. Очевидной индукцией доказывается, что если $\{U_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — набор открытых множеств, в котором множество индексов $\mathfrak{A}$ *конечно*, то их пересечение $\bigcap_{\alpha\in\mathfrak{A}} U_\alpha$ также является открытым.

Примеры топологических пространств многочисленны; из самых простых:

Пример 1 (дискретная топология). Множество X произвольно, любое подмножество $U \subset X$ считается открытым.

Пример 2 (топология “слипшихся точек”). Множество X произвольное, открытыми считаются только $\varnothing$ и X.

Пример 3. Множество X произвольно, открытыми считаются множества $U \subset X$ такие, что дополнение $X \setminus U$ конечно, а также пустое множество.

Пример 4 (стандартная топология на прямой). $X = \mathbb{R}$, множество называется открытым, если оно либо пусто, либо является объединением интервалов (не обязательно конечным). Эквивалентное определение (проверьте!): $U \subset \mathbb{R}$ открыто, если либо $U = \varnothing$, либо для каждой точки $a \in U$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U$. Свойства и очевидны; свойство доказывается так: пусть $a \subset U = U_1 \cap U_2$. Тогда в силу открытости обоих множеств существуют $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такие, что $(a-\varepsilon_i, a+\varepsilon_i) \subset U_i$ при $i = 1, 2$. Следовательно, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U$, где $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$.

Подмножество $C \subset X$ топологического пространства X называется замкнутым, если его дополнение $X \setminus C$ открыто. Поскольку $X \setminus \bigcup_\alpha U_\alpha = \bigcap_\alpha (X \setminus U_\alpha)$ и наоборот, можно определить топологию как набор подмножеств, называемых замкнутыми и обладающих свойствами, которые получаются из свойств открытых подмножеств обменом местами знаков объединения и пересечения:

- Подмножества $\varnothing$ и X являются замкнутыми.
- Если $\{C_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — произвольный набор замкнутых подмножеств (множество индексов $\mathfrak{A}$ может быть конечным или бесконечным любой мощности), то их пересечение $\bigcap_{\alpha\in\mathfrak{A}} C_\alpha$ также является замкнутым.
- Если C_1, C_2 — замкнутые подмножества, то их объединение $C_1 \cup C_2$ также является замкнутым. Очевидной индукцией доказывается, что если $\{C_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — набор замкнутых множеств, в котором множество индексов $\mathfrak{A}$ *конечно*, то их объединение $\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} C_\alpha$ также является замкнутым.

В примере 1 замкнутыми являются все подмножества, в примере 2 — только $\varnothing$ и X, в примере 3 — X и конечные подмножества.

Лемма 1. *Множество $C \subset \mathbb{R}$ является замкнутым тогда и только тогда, когда либо оно пусто, либо для всякой последовательности $a_1, a_2, \dots \subset C$, имеющей предел a, выполнено условие $a \in C$.*

Доказательство. Пусть $U \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \setminus C$ открыто, и $a_1, a_2, \dots \in C$, $a \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} a_n$. Если $a \in U$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U$ и тем самым не содержит точек $a_1 . a_2, \dots$. Следовательно, для всякого n выполнено неравенство $|a_n - a| \geq \varepsilon$, что противоречит определению предела. Следовательно, $a \in C$.

Обратно, пусть $C \subset \mathbb{R}$ содержит пределы всех сходящихся последовательностей своих элементов, и $U \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \setminus C$. Пусть $a \in U$; рассмотрим интервалы $(a-1, a+1), (a-1/2, a+1/2), (a-1/3, a+1/3), \dots$. Если хотя бы один из них лежит в U ($(a-1/n, a+1/n) \subset U$), то поскольку a произвольно, открытость U доказана. Если ни один интервал в U не лежит, то для произвольного n имеется точка $a_n \in (a-1/n, a+1/n) \cap C$. Очевидно, $0 \le |a_n - a| < 1/n$, откуда вытекает $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ и, следовательно, $a \in C$ вопреки выбору. $\square$

Некоторые способы получения новых топологических пространств:

1. Несвязное объединение Пусть X_1, X_2 — непересекающиеся топологические пространства. Положим $X = X_1 \cup X_2$, и пусть $U \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда $U = U_1 \cup U_2$, где $U_1 \subset X_1$ и $U_2 \subset X_2$ открыты. Нетрудно проверить, что тем самым в X определена топология.

2. Подмножество Пусть X — топологическое пространство, а $Y \subset X$ — произвольное подмножество (не обязательно открытое или замкнутое!). Назовем $V \subset Y$ открытым тогда и только тогда, когда $V = Y \cap U$ для некоторого (скорее всего, не единственного!) открытого множества $U \subset X$.

Проверим, что таким образом в Y действительно определена структура топологического пространства. Действительно, $\varnothing = Y \cap \varnothing$ и $Y = Y \cap X$ открыты. Если $V_\alpha = Y \cap U_\alpha$, где $U_\alpha \subset X$ открыто для любого α, то и $\bigcup_\alpha V_\alpha = \bigcup_\alpha (Y \cap U_\alpha) = Y \cap \bigcup_\alpha U_\alpha$ открыто. Если $V_1 = Y \cap U_1$, $V_2 = Y \cap U_2$, где $U_1, U_2 \subset X$ открыты, то $V_1 \cap V_2 = Y \cap (V_1 \cap V_2)$ открыто.

Пример 5. Пусть $X = \mathbb{R}$, $Y \stackrel{\text{def}}{=} [a, b] \subset X$. Нетрудно проверить (проделайте!), что подмножество $V \subset [a, b]$ открыто, если оно либо пусто, либо является объединением (возможно, бесконечным) интервалов $(p, q) \subset [a, b]$ и полуинтервалов $[a, q)$ и $(p, b]$.

2. Непрерывные отображения

Отображение $f : X \to Y$ двух топологических пространств называется непрерывным, если для произвольного открытого множества $U \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(U) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in X \mid f(a) \in U\} \subset X$ также открыт.

Пример 6. Если X — пространство с дискретной топологией или Y — пространство с топологией склеенных точек, то любое отображение $f : X \to Y$ непрерывно

Лемма 2. *Если $X = Y = \mathbb{R}$, то определение непрерывного отображения совпадает с классическим понятием непрерывной функции одной переменной: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно, если для всякого $a \in \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $|x - a| < \delta$, то $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть вначале f непрерывно, и $\varepsilon > 0$. Множество $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ открыто (это интервал), поэтому его прообраз $U = f^{-1}((f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon))$ должен быть открыт. Поскольку $a \in U$, существует такое $\delta > 0$, что $(a - \delta, a + \delta) \subset U$. Это и означает, что для всякого $x \in (a - \delta, a + \delta)$, то есть всякого x такого, что $|x - a| < \delta$, выполнено включение $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, то есть неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Обратно, пусть f — классическая непрерывная функция одной переменной, и $U \subset \mathbb{R}$ — непустое открытое множество, и пусть $a \in f^{-1}(U)$ (если таких a не существует, то $f^{-1}(U) = \varnothing$ открыто). Тогда $f(a) \in U$; поскольку U открыто, существует $\varepsilon > 0$ такое, что $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset U$. В силу классической непрерывности существует $\delta > 0$ такое, что если $x \in (a - \delta, a + \delta)$, то имеет место неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, то есть включение $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) \subset U$. Отсюда $(a - \delta, a + \delta) \subset f^{-1}(U)$, и $f^{-1}(U)$ открыто. $\square$

Предложение 1. *Если отображения $f : A \to B$ и $g : B \to C$ непрерывны, то их композиция $g \circ f : A \to C$ также непрерывна.*

Доказательство очевидно.

Напомним, что отображение множеств $f : X \to Y$ называется взаимно однозначным, если для всякого элемента $a \in Y$ существует единственный элемент $b \in X$ такой, что $f(b) = a$.

Лемма 3. *Отображение $f : X \to Y$ взаимно однозначно тогда и только тогда, когда оно обратимо, т.е. существует отображение $g : Y \to X$, для которого $g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Если отображение g существует, то оно единственно (обозначается $g = f^{-1}$).*

Доказательство леммы — простое упражнение.

Отображение $f : X \to Y$ между двумя топологическими пространствами называется гомеоморфизмом, если оно непрерывно, взаимно однозначно (т.е. обратимо, согласно лемме 3) и обратное отображение $f^{-1} : Y \to X$ также непрерывно. Эквивалентное определение: f взаимно однозначно, прообраз $f^{-1}(U) \subset X$ любого открытого множества $U \subset Y$ открыт и образ $f(V) \subset Y$ любого открытого множества $V \subset X$ открыт. Топологические пространства, между которыми существует гомеоморфизм, называются гомеоморфными.

Предложение 2. *Гомеоморфизм пространств — отношение эквивалентности.*

Доказательство — простое упражнение; сравните его с доказательством теоремы 2 лекции 1.

Пример 7. Круг $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ гомеоморфен квадрату $Q \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x,y \le 1\}$ (и то, и другое — с топологией подмножества $\mathbb{R}^2$). Гомеоморфизм $f : \Omega \to Q$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1+y^2}(x,y), & |y| \le |x|\,, \\ \sqrt{1+x^2}(x,y), & |y| \ge |x|\,. \end{cases}$$

Обратное отображение $f^{-1} : Q \to \Omega$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}(x,y), & |y| \le |x|\,, \\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(x,y), & |y| \ge |x|\,. \end{cases}$$

Оба отображения непрерывны (подробности доказательств см. в курсе анализа).

Гомеоморфные пространства топологически неотличимы: если какое-нибудь топологическое утверждение (т.е. утверждение, которое можно сформулировать только в терминах открытых подмножеств и непрерывных отображений) верно для какого-нибудь пространства, то оно верно и для любого гомеоморфного ему пространства.

Пример 8. Докажем, что для квадрата Q из примера 7 верна теорема Брауэра (доказанная в лекции 1 для круга). Действительно, пусть $h : Q \to Q$ — непрерывное отображение. Рассмотрим отображение $f^{-1} \circ h \circ f : \Omega \to \Omega$; согласно предложению 1, оно непрерывно. В силу теоремы Брауэра для круга это отображение имеет неподвижную точку: существует $c \in \Omega$ такое, что $(f^{-1} \circ h \circ f)(c) = c$, то есть $f^{-1}(h(f(c))) = c$. Применим к обеим частям этого равенства отображение f и получим $h(f(c)) = f(c)$ — иными словами, $f(c) \in Q$ является неподвижной точкой отображения h. Существование такой неподвижной точки и есть теорема Брауэра.