ЛЕКЦИЯ 1

Краткое содержание. Примеры топологических утверждений: теорема Брауэра, основная теорема алгебры.

1. Теорема Брауэра Мы будем считать известным понятие непрерывной функции одной действительной переменной, а также следующее утверждение:

Утверждение 1 (теорема о промежуточном значении)**.** *Пусть* $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ *— непрерывная функция, и* $C \in [A, B]$*, где* $A \overset{def}{=} h(a)$ *и* $B \overset{def}{=} h(b)$*. Тогда существует точка* $c \in [a, b]$ *такая, что* $h(c) = C$*.*

Теперь мы можем доказать такую теорему:

Теорема 1 (теорема Брауэра в размерности 1)**.** *Пусть* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *— непрерывная функция. Тогда существует точка* $c \in [0, 1]$ *такая, что* $f(c) = c$*.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) \overset{\text{def}}{=} x - f(x)$; очевидно, она непрерывна. Поскольку $f(0), f(1) \in [0, 1]$, получаем $g(0) = -f(0) \le 0$ и $g(1) = 1 - f(1) \ge 0$. Применяя утверждение 1 к функции g на отрезке $[a, b] = [0, 1]$ и промежуточному значению $C = 0$, получим, что существует $c \in [0, 1]$ такое, что $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$. □

Рассмотрим теперь отображение $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$; в координатной записи это пара функций: $f(t) = (x(t), y(t))$. Мы будем считать f непрерывным, если функции x и y непрерывны. *Непрерывной замкнутой плоской кривой* мы назовем непрерывное отображение $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ ($a < b$ — любые действительные числа), для которого $f(a) = f(b)$.

Пример 1. Пусть $k \in \mathbb{Z}$; тогда кривая $\gamma^{(k)} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, заданная формулой $\gamma^{(k)}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos kt, \sin kt)$, называется k-кратной окружностью. Действительно, для произвольного k и всех $t \in [0, 2\pi]$ точка $\gamma^{(k)}(t)$ лежит на единичной окружности с центром в нуле — $x^2(t) + y^2(t) = \cos^2 kt + \sin^2 kt = 1$ – и проходит через каждую ее точку $|k|$ раз: $x(t) = x(t_0), y(t) = y(t_0) \iff t = t_0 + 2\pi\ell/k$, $\ell = 0, \dots, |k| - 1$ при $k \ne 0$; кривая $\gamma^{(0)}(t) \equiv (1, 0)$ “стоит на месте”.

Непрерывная функция двух переменных $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ определяется аналогично непрерывной функции одной переменной. Отображение $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — пара таких функций: $F(t, s) = (x(t, s), y(t, s))$; по определению, оно непрерывно, если непрерывны функции x и y. Непрерывное отображение $F : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ называется гомотопией кривой $f_0(t) \overset{\text{def}}{=} F(t, 0)$ в кривую $f_1(t) \overset{\text{def}}{=} F(t, 1)$ при условии, что для произвольного $s \in [0, 1]$ формула $f_s(t) \overset{\text{def}}{=} F(t, s)$ задает замкнутую кривую: $f_s(a) = F(a, s) = F(b, s) = f_s(b)$. Кривые f_0 и f_1 называются гомотопными ($f_0 \sim f_1$), если между ними существует гомотопия.

Мы часто будем рассматривать кривые, не проходящие через начало координат, т.е. отображения $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, а также гомотопии таких кривых.

Теорема 2. *Гомотопность кривых обладает следующими свойствами:*

1) *Каждая кривая гомотопна самой себе:* $f \sim f$ *для любой кривой* f*.*
2) *Если одна кривая гомотопна другой, то та, в свою очередь, гомотопна ей: если* $f_0 \sim f_1$*, то* $f_1 \sim f_0$*.*
3) *Если первая кривая гомотопна второй, а вторая — третьей, то первая гомотопна третьей: если* $f_0 \sim f_1$ *и* $f_1 \sim f_2$*, то* $f_0 \sim f_2$*.*

Замечание. Указанные свойства носят названия “рефлексивность”, “симметричность” и “транзитивность”, соответственно. Если некоторое отношение $\sim$ (между кривыми или другими объектами) рефлексивно, симметрично и транзитивно, то оно называется отношением эквивалентности. Пример (не из топологии): будем писать $p \sim q$, где p и q — целые числа, если $p - q$ делится на 2 (т.е. p и q имеют одну и ту же четность).

Доказательство теоремы 2. 1. Гомотопия между кривой f и ею же: $F(t, s) \overset{\text{def}}{=} f(t)$.

2. Если $F : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ — гомотопия между $f_0(t) \overset{\text{def}}{=} F(t, 0)$ и $f_1(t) \overset{\text{def}}{=} F(t, 1)$, то гомотопия между f_1 и f_0 задается формулой $\Phi(t, s) \overset{\text{def}}{=} F(t, 1 - s)$.

3. Если F_1 — гомотопия между f_0 и f_1, а F_2 — гомотопия между f_1 и f_2, то гомотопия между f_0 и f_2 задается формулой

$$F(t,s) = \begin{cases} F_1(t, 2s), & 0 \le s \le 1/2, \\ F_2(t, 2s-1), & 1/2 \le s \le 1. \end{cases}$$

Остается проверить (проделайте!), что эти формулы действительно задают непрерывные отображения. □

Утверждение 2. *Замкнутые кривые* $\gamma^{(k)} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *при различных* k *не гомотопны.*

Доказательство утверждения 2 будет дано позднее в этом курсе. Смысл доказательства в том, что кривая $\gamma^{(k)}$ делает k оборотов вокруг точки $(0,0)$ на плоскости, и это количество оборотов при гомотопии кривой не меняется.

Теорема 3 (теорема Брауэра в размерности 2). *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *— круг (с границей) единичного радиуса с центром в начале координат. Тогда произвольное непрерывное отображение* $F : \Omega \to \Omega$ *имеет неподвижную точку: существует точка* $(x,y) \in \Omega$ *такая, что* $F(x,y) = (x,y)$.

Доказательство. Предположим, что это не так и отображение F не имеет неподвижной точки. Зафиксируем $t \in [0,1]$ и пусть $\Phi(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} (t\cos s, t\sin s) - F(t\cos s, t\sin s)$. Тем самым определено непрерывное отображениее $\Phi : [0,2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Следовательно, при произвольном фиксированном t отображение $\varphi_t : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, заданное формулой $\varphi_t(s) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(t,s)$ — непрерывная замкнутая (почему?) кривая, а отображение Φ — гомотопия таких кривых.

Пусть $t = 1$. Точка $F(1,s)$ лежит в круге Ω и, следовательно, $\Phi(1,s)$ образует острый угол с радиус-вектором точки $(\cos s, \sin s)$ (лежащим на границе круга). Рассмотрим теперь отображение $\mu(u,s) \stackrel{\text{def}}{=} u(\cos s, \sin s) + (1-u)\Phi(1,s)$, $0 \le u \le 1$. Это линейная комбинация с неотрицательными коэффициентами двух векторов, образующих острый угол — следовательно, она не равна нулю: $\mu : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Очевидно, это отображение непрерывно, и тем самым является гомотопией между кривыми $\mu(0,s) = \varphi_1(s)$ и $\mu(1,s) = \gamma^{(1)}(s)$.

Таким образом, φ_1 гомотопна $\gamma^{(1)}$. С другой стороны, $\varphi_0(s) = -F(0,0)$ — постоянный ненулевой (почему?) вектор, образующий с вектором $(1,0)$ угол, который мы обозначим λ. Рассмотрим отображение $\varrho(t.s) = R_0^{t\lambda}$, где R_0^{ξ} — поворот вокруг начала координат на угол ξ. Тогда ϱ — гомотопия, соединяющая кривую φ_0 с кривой ψ такой, что $\psi(s)$ для всех $s \in [0,2\pi]$ — вектор, сонаправленный $(1,0)$. Нетрудно видеть (докажите!), что кривая ψ гомотопна кривой $\gamma^{(0)}$. Теперь из теоремы 2 следует, что ϱ_0 гомотопна $\gamma^{(0)}$. В то же время ϱ_1 гомотопна $\gamma^{(1)}$ — это было показано в предыдущем абзаце. Из теоремы 2 вытекает теперь, что $\gamma^{(0)}$ и $\gamma^{(1)}$ гомотопны, что противоречит утверждению 2. Следовательно, непрерывных отображений $F : \Omega \to \Omega$ без неподвижных точек не существует, и теорема Брауэра доказана. □

2. Уравнения нечетной степени и основная теорема алгебры

Теорема 4. *Пусть* $P(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1 x + a_0$ *— многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами* $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. *Тогда он имеет действительный корень:* $\exists c \in \mathbb{R} : P(c) = 0$.

Задача 1. Пусть $x > (2n+1)(\,|a_0| + \dots + |a_{2n}|$ и $x > 1$. Тогда $x > (2n+1)\,|a_{2n}| \ge -(2n+1)a_{2n}$, откуда $x^{2n+1} > -(2n+1)a_{2n}x^{2n}$ (поскольку $x > 0$), а также $x > (2n+1)\,|a_{2n-1}| \ge -(2n+1)a_{2n-1}$, откуда $x^{2n+1} > -(2n+1)a_{2n-1}x^{2n} > -(2n+1)a_{2n-1}x^{2n-1}$ (поскольку $x > 1 > 0$), и аналогично, $x^{2n} > -(2n+1)a_k x^k$ для всех $k = 0, \dots, 2n$. Складывая эти неравенства, получаем $(2n+1)x^{2n+1} > -(2n+1)(a_{2n}x^{2n} + \dots + a_0)$, откуда $P(x) > 0$.

Аналогично, если $x < -(2n+1)(\,|a_0| + \dots + |a_{2n}|$ и $x < -1$, получаем $P(x) < 0$ (здесь используется тот факт, что $2n+1$ — нечетное число!). Теперь из утверждения 1 вытекает, что существует $c \in \mathbb{R}$, для которого $P(c) = 0$.

Теорема 5 (основная теорема алгебры). *Многочлен* $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ *степени* $n \ge 1$ *с произвольными комплексными коэффициентами* $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ *имеет комплексный корень: существует комплексное число* c *такое, что* $P(c) = 0$.

Доказательство. Зафиксируем $t \ge 0$, и пусть $\varrho_t(s) = P(t(\cos s + i \sin s)) \in \mathbb{C}$. Отождествим $\mathbb{C}$ с $\mathbb{R}^2$; таким образом, ϱ_t становится замкнутой (почему?) кривой на плоскости.

Предположим, что многочлен P не имеет корней; тогда кривая ϱ_t при любом t не проходит через начало координат. Отсюда вытекает, что $a_0 \ne 0$ (иначе $c = 0$ — корень).

Кривая $\varrho_0 \equiv a_0$ гомотопна $\gamma^{(0)}$ (как кривая в $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) — этот факт доказывается так же, как аналогичный факт в доказательстве теоремы Брауэра.

Лемма 1. *Если* $t > (n+1)(\,|a_0| + \dots + |a_{n-1}|)$ *и* $t > 1$, *то кривая* ϱ_t *гомотопна* $\gamma^{(n)}$.

Доказательство. Рассмотрим гомотопию $\mu(s,u) \stackrel{\text{def}}{=} z^n + u(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0)$, где $u \in [0,1]$ — параметр гомотопии, а $z = t(\cos s + i \sin s)$. Тогд $|z| = t$, откуда $|z^n| = t^n > (n+1)\,|a_n|\,t^{n-1}$ (ср. с доказательством теоремы 4 выше) $= (n+1)\,|a_{n-1}z^{n-1}| \geq (n+1)\,|ua_{n-1}z^{n-1}|$, а также $|z^n| > |ua_k z^{n-1}| > |ua_k z^k|$ для всех $k = 0, \dots, n-1$. Модуль суммы произвольного набора комплексных чисел (т.е. плоских векторов) не превосходит суммы их модулей, откуда $|z^n| > |u(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)|$, и, следовательно, $\mu(s,u) \neq 0$ — кривая μ_u ни при каком u не проходит через начало координат. Следовательно, кривая $\mu_1 = \varrho_t$ гомотопна кривой $\mu_0(s) = t^n(\cos s + i \sin s)^n = t^n(\cos ns + i \sin ns) = t^n \gamma^{(n)}(s)$; эта кривая, в свою очередь, гомотопна кривой $\gamma^{(n)}$ (докажите!). Лемма теперь вытекает из теоремы 2. □

Таким образом, кривая ϱ_0 гомотопна $\gamma^{(0)}$, а ϱ_t при достаточно большом $t > 0$ — кривой $\gamma^{(n)}$. Из утверждения 2 и теоремы 2 вытекает, что кривые ϱ_0 и ϱ_t не гомотопны как кривые в $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Следовательно, ϱ не является гомотопией в $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, то есть существует $t > 0$ и s такие, что $\varrho_t(s) = 0$, то есть $P(t(\cos s + i \sin s)) = 0$. □