Накрытия и фундаментальная группа

Задача 10.0. Любой ли сюръективный локальный гомеоморфизм является накрытием?

Задача 10.1. Если $\widetilde{X}$ накрывает k-листно пространство[1] X, то $\chi(\widetilde{X}) = k \cdot \chi(X)$.

Задача 10.2. а) Накройте пространство ◯◯ пространством ◯◯◯.
б) Накройте сферу с двумя ручками сферой с тремя ручками.
в) Когда сферой с G ручками можно накрыть сферу с g ручками?

Задача 10.3. а) При каких n существует свободное действие группы $\mathbb{Z}/n$ на S^2?
б) (= 8.2б) Любое отображение $\mathbb{R}P^2$ в себя имеет неподвижную точку.

* * *

▷ Пусть разумное[2] пространство X линейно связно. Его единственным образом можно накрыть связным односвязным пространством $\bar{X}$ (“универсальное накрытие”). Группа автоморфизмов универсального накрытия есть $\pi_1(X)$; действие $\pi_1(X)$ на любом слое универсального накрытия свободно и транзитивно.

Задача 10.4. Постройте универсальное накрытие а) тора; б) ленты Мёбиуса; в) $\mathbb{R}P^2$.

Задача 10.5. Постройте универсальное накрытие а) $S^1 \vee S^1$; б) $S^1 \vee S^2$; в) $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$.

▷ Любое накрытие линейно связных пространств $\widetilde{X} \to X$ индуцирует *вложение* групп $\pi_1(\widetilde{X}) \hookrightarrow \pi_1(X)$. По подгруппе $H \subset \pi_1(X)$ можно восстановить накрытие: $\widetilde{X} \cong \bar{X}/H$. (Ср. это соответствие между *накрытиями пространств* и *подгруппами автоморфизмов накрытия* с соответствием Галуа между *расширениями полей* и *подгруппами автоморфизмов расширения*.)

Задача 10.6. а) Какая подгруппа в $\pi_1(S^1 \vee S^1) = \langle a, b \rangle$ соответствует накрытию из задачи 2а)? б) Какое накрытие соответствует подгруппе $\langle a \rangle \subset \langle a, b \rangle = \pi_1(S^1 \vee S^1)$?

Задача 10.7. а) Свободную группу со счетным числом образующих можно вложить в свободную группу с двумя образующими.
б) Подгруппа свободной группы свободна (докажите, используя фунд. группу).

Задача 10.8. У неориентируемого многообразия есть нетривиальное двулистное накрытие с ориентируемым тотальным пространством.

Задача 10.9*. Четырехточечное множество наделили минимальной (по количеству открытых подмножеств) топологией, в которой две точки открыты (каждая из них является открытым множеством), а остальные две — замкнуты. Вычислите фундаментальную группу этого пространства и постройте его универсальное накрытие.

[1] Оба пространства можно считать конечными клеточными комплексами.
[2] Например, локально линейно связное и локально односвязное (у нас будут только такие).