

Степень отображения и векторные поля

Задача 8.1. Векторное поле, заданное на границе кольца (и не имеющее там особых точек), может быть продолжено до векторного поля на всем кольце без особых точек тогда и только тогда, когда индексы вдоль обеих граничных окружностей равны.

Задача 8.2. а) У отображения сферы в себя есть либо неподвижная точка, либо точка, переходящая в диаметрально противоположную.

б*) У отображения $\mathbb{R}P^2$ в себя есть неподвижная точка.

Задача 8.3. Постройте векторное поле ровно с одной особой точкой а) на сфере; б) на сфере с двумя ручками.

▷ Как объяснялось на лекции, если векторное поле на поверхности имеет конечное число особых точек, то сумма их индексов равна эйлеровой характеристике поверхности.

Задача 8.4. На компактной поверхности с краем имеется векторное поле, которое на краю направлено внутрь поверхности. Докажите, что если у поля конечное число особых точек, то сумма их индексов равна эйлеровой характеристике.

Задача 8.5. Постройте векторное поле на S^{2k-1} без особых точек.

* * *

Задача 8.6. Две непрерывные кривые в квадрате, соединяющие его противоположные вершины, имеют общую точку. (Указание: припомните теорему Брауэра.)