Выпуклая геометрия II

9◇1. Пусть

$$Q = \{\boldsymbol{x} \in A(V)\colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}\rangle + 1 \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m\} = \bigcap_{i=1}^{m} H_+(\boldsymbol{a}_i, 1)$$

— ограниченное полиэдральное множество. Скажем, что неравенство $\langle \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{x}\rangle + 1 \geqslant 0$ является *лишним*, если удаление его из системы неравенств не меняет множество Q, т. е. $Q = \bigcap_{i\neq j} H_+(\boldsymbol{a}_i, 1)$. Докажите, что неравенство $\langle \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{x}\rangle + 1 \geqslant 0$ является лишним тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a}_j \in \operatorname{conv}(\boldsymbol{a}_i\colon i \neq j)$, т. е. точка $\boldsymbol{a}_j$ является «лишней» в записи $Q^* = \operatorname{conv}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$.

9◇2. Пусть F и G — грани замкнутого выпуклого множества C, причем $F \subsetneq G$. Докажите, что $\dim F < \dim G$.

9◇3. Докажите, что непустое пересечение любого набора граней замкнутого выпуклого множества является гранью. (Указание: сначала докажите утверждение для конечного набора граней, а затем воспользуйтесь предыдущей задачей.)

9◇4. Докажите, что всякая грань полиэдрального множества является пересечением содержащих её гиперграней.

9◇5. Докажите, что каждая крайняя точка выпуклого многогранника является его вершиной.

9◇6. Пусть C — выпуклый компакт, $\mathbf{0} \in \operatorname{int} C$. Докажите, что $\boldsymbol{x} \in C \setminus \operatorname{int} C$ тогда и только тогда, когда $H(\boldsymbol{x}, 1)$ — опорная гиперплоскость полярного множества C^*.

9◇7. Пусть P — выпуклый многогранник, $\mathbf{0} \in \operatorname{int} P$, пусть F — грань многогранника P, а F° — соответствующая грань полярного (двойственного) многогранника P^*. Докажите, что $\dim F + \dim F^\circ = \dim P - 1$.

9◇8. *Выпуклым многогранным конусом* σ в пространстве V называется множество неотрицательных линейных комбинаций некоторого конечного набора векторов $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$:

$$\sigma = \{\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_s \boldsymbol{v}_s\colon \lambda_i \geqslant 0\}.$$

Докажите, что множество является выпуклым многогранным конусом тогда и только тогда, когда оно является пересечением конечного числа полупространств вида $H_+(\boldsymbol{u}, 0)$ (проходящих через $\mathbf{0}$).

9◇9. Пусть σ — выпуклый многогранный конус. Рассмотрим множество

$$\sigma^\vee := \{\boldsymbol{u} \in V^*\colon \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle \geqslant 0 \quad \text{для любого } \boldsymbol{v} \in \sigma\}.$$

Докажите, что **а)** $\sigma^\vee$ — выпуклый многогранный конус (он называется *двойственным* к σ);
б) $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$; **в)** $\dim \sigma < \dim V$ тогда и только тогда, когда $\sigma^\vee$ содержит прямую.

9◇10. Пусть σ, σ' — два выпуклых многогранных конуса, причем их пересечение $\tau := \sigma \cap \sigma'$ является гранью каждого из них. Докажите, что существует такая гиперплоскость H, что $\sigma \subset H_+$, $\sigma' \subset H_-$ и $H \cap \sigma = H \cap \sigma' = \tau$.