Выпуклая геометрия

8◇1. Пусть C — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ пространства V. Найдите матицу перехода от сопряжённого базиса $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ к сопряжённому базису $\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n$ пространства V^*.

8◇2. Докажите, что если V бесконечномерно, то пространства V и V^* неизоморфны.

8◇3. Докажите, что множество $C \subset A(V)$ выпукло тогда и только тогда, когда вместе с любыми точками $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ оно содержит симплекс $\Delta(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$.

8◇4. Убедитесь явно, что относительная внутренность симплекса непуста.

8◇5. Верно ли, что выпуклая оболочка замкнутого множества замкнута?

8◇6 (сумма Минковского). Для множеств $S_1, S_1 \subset A(V)$ множество

$$S_1 + S_2 := \{\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \colon \boldsymbol{x}_1 \in S_1,\ \boldsymbol{x}_2 \in S_2\}$$

называется их *суммой Минковского*. Докажите следующие свойства:
а) $\operatorname{conv}(S_1 + S_2) = \operatorname{conv} S_1 + \operatorname{conv} S_2$ для любых S_1, S_2;
б) если C_1, C_2 — выпуклые множества, то $C_1 + C_2$ также выпукло;
в) если C_1, C_2 — выпуклые множества, то $\operatorname{ri}(C_1 + C_2) = \operatorname{ri} C_1 + \operatorname{ri} C_2$.

8◇7 (теорема Каратеодори). Для любого подмножества $S \subset A(V)$ с $\dim \operatorname{aff} S = k$ его выпуклая оболочка $\operatorname{conv} S$ совпадает с множеством всех выпуклых комбинаций не более чем $k+1$ точек из S.

8◇8 (теорема Радона). Пусть $S = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ — множество из $k \geqslant n+2$ точек пространства $A(V)$, где $\dim V = n$. Тогда S можно представить в виде несвязного объединения непересекающихся подмножеств, $S = S_1 \sqcup S_2$, таких что $\operatorname{conv} S_1 \cap \operatorname{conv} S_2 \neq \varnothing$.

8◇9 (теорема Хелли). Пусть $(C_i)_{i \in I}$ — набор из $|I| \geqslant n+1$ выпуклых множеств в $A(V)$, $\dim V = n$. Рассмотрим следующие утверждения:
а) любые $n+1$ из множеств C_i имеют непустое пересечение; **б)** все множества C_i имеют непустое пересечение.
Докажите, что если $|I| < \infty$, то а)⇒б).
Указание. Проведите индукцию по $|I|$, применяя теорему Радона.
Покажите на примере, что в случае $|I| = \infty$ импликация а)⇒б) уже неверна.
Докажите, что если все множества C_i замкнуты и хотя бы одно из них компактно, то импликация а)⇒б) справедлива без ограничений на I.

8◇10. Пусть $(C_i)_{i \in I}$ — набор выпуклых множеств в $A(V)$. Докажите, что $\operatorname{conv}(\bigcup_{i \in I} C_i)$ совпадает с множеством всех выпуклых комбинаций $\lambda_1 \boldsymbol{x}_{i_1} + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{x}_{i_k}$, где $\boldsymbol{x}_{i_j} \in C_{i_j}$.

8◇11. Пусть C_1, C_2 — выпуклые множества. Говорят, что гиперплоскость H *разделяет* C_1 и C_2, если $C_1 \subset H_-$, $C_2 \subset H_+$ и хотя бы одно из множеств C_1, C_2 не содержится в H. Докажите, что гиперплоскость, разделяющая C_1 и C_2, существует в том и только том случае, когда $\operatorname{ri} C_1 \cap \operatorname{ri} C_2 = \varnothing$.
Указание. Рассмотрите выпуклое множество $C = C_1 - C_2$ и используйте задачу 8◇6.

8◇12. Пусть C_1, C_2 — выпуклые множества. Говорят, что гиперплоскость $H(\boldsymbol{a}, b)$ *сильно разделяет* C_1 и C_2, если для некоторого $\varepsilon > 0$ обе гипеплоскости $H(\boldsymbol{a}, b - \varepsilon)$ и $H(\boldsymbol{a}, b + \varepsilon)$ разделяют C_1 и C_2. Докажите, что гиперплоскость, сильно разделяющая C_1 и C_2, существует тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{0} \notin \overline{C_1 - C_2}$.
Указание. Вначале рассмотрите случай, когда C_2 — точка.
Выведите отсюда, что для любых двух непересекающихся замкнутых выпуклых множеств, одно из которых компактно, существует сильно разделяющая гиперплоскость.