Линейные преобразования

6◇1. Докажите, что два конечномерных линейных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

6◇2. Определите матрицу линейного отображения $\mathcal{A}\colon V \to W$ по отношению к базисам в V и W и выведите закон изменения матрицы линейного отображения при замене базисов.

6◇3. Пусть подпространство W в n-мерном пространстве V задано как линейная оболочка векторов: $W = \langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k \rangle$, причём векторы $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ линейно независимы. Пусть B — матрица размера $n \times k$, составленная из столбцов координат векторов $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ в некотором ортонормированном базисе. Найдите матрицу ортогонального проектора $\mathrm{pr}_W\colon V \to V$, $\boldsymbol{v} \mapsto \mathrm{pr}_W \boldsymbol{v}$, в этом базисе.

6◇4. В стандартном базисе евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ найдите матрицы ортогонального проектора и отражения относительно подпространства, **а)** заданного уравнением $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$;
б) заданного системой $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

6◇5. Верно ли, что для любого оператора $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве свойство $\mathcal{A}(W) \subset W$ влечёт $\mathcal{A}(W^{\perp}) \subset W^{\perp}$?

6◇6. Найдите канонический вид и соответствующий ортонормированный базис ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей

а) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 2 & -6 \\ -6 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$; **б)** $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6◇7. Докажите, что отображение

$$\alpha\colon Sp(1) \xrightarrow{q \mapsto (x \mapsto qxq^{-1})} SO(\mathbb{H}_0) = SO(3)$$

является сюръективным гомоморфизмом с ядром $\{-1, 1\}$.

6◇8. Докажите, что отображение

$$\alpha\colon Sp(1) \times Sp(1) \xrightarrow{(q_1, q_2) \mapsto (x \mapsto q_1 x q_2^{-1})} SO(\mathbb{H}) = SO(4)$$

является сюръективным гомоморфизмом с ядром $\{-1, 1\}$.

6◇9. Определим *специальную унитарную группу* $SU(n)$ как группу комплексных унитарных $n \times n$-матриц с определителем 1, т. е. матриц C, удовлетворяющих соотношениям $\overline{C}^t C = E$, $\det C = 1$. Докажите изоморфизмы:
а) $SU(2)/\{1, -1\} \cong Sp(1)/\{1, -1\} \cong SO(3)$; **б)** $\big(SU(2) \times SU(2)\big)/\{1, -1\} \cong SO(4)$.