

Евклидовы пространства III

5♦1. Докажите следующие свойства ортогонального дополнения для подпространств U и W (конечномерного) евклидова или эрмитова пространства V :

а) $(U^\perp)^\perp = U$; **б)** $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$; **в)** $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

5♦2. а) Найдите угол между вектором $v = (4, -8, 0, 1)$ и плоскостью $\pi = \langle (-1, 1, 2, 3), (2, 0, 1, 1) \rangle$.

б) Найдите угол между вектором $v = (1, -5, -3, -5)$ и плоскостью π , заданной системой уравнений

$$\begin{cases} -4x + 3y + 2z + t = 0 \\ x - 2y + z = 0. \end{cases}$$

5♦3. а) Найдите расстояние между плоскостью $\pi = (4, 1, -2, 5) + \langle (0, 1, -2, 4), (1, 1, -3, 3) \rangle$ и прямой $l = (2, 3, 2, 9) + \langle (0, -1, 2, -5) \rangle$.

б) Найдите расстояние между прямой $l = (-1, 3, 4, -1) + \langle (1, -2, -1, -1) \rangle$ и плоскостью π , заданной системой уравнений
$$\begin{cases} 2x + y - 2z + 2t = 4 \\ 5x + 2y - 7z - 6t = -7. \end{cases}$$

5♦4. Единичным кубом I^n в n -мерном аффинном евклидовом пространстве называется параллелепипед на векторах, образующих ортонормированный базис.

а) Найдите расстояние между двумерной гранью четырёхмерного куба I^4 и его диагональю, не пересекающей эту грань.

б) Докажите, что ортогональные проекции вершин куба I^n на любую его диагональ делят её на n равных частей.

в) Найдите угол между диагональю куба I^n и его k -мерной гранью.

5♦5. Какие трёхмерные тела получаются в сечении четырёхмерного куба

$$\{x \in \mathbb{R}^4: -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3, 4\}$$

трёхмерной гиперплоскостью $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \varepsilon$ при значениях $\varepsilon = 0, 2, 3, 4, 5$? Сравните результаты с аналогичной трёхмерной задачей.

5♦6. Даны три симметричные матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В каждом из случаев выясните, может ли матрица быть матрицей Грама

а) линейно независимой системы векторов;

б) системы векторов (не обязательно линейно независимой)?

5♦7. Докажите обобщённое неравенство Адамара:

$$\det G(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) \leq \det G(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i) \det G(\mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_k), \quad i = 1, \dots, k,$$

и выясните его геометрический смысл. Когда оно превращается в равенство?

5♦8. Докажите, что расстояние между аффинными подпространствами $\mathfrak{B} = P + \langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k \rangle$ и $\mathfrak{C} = Q + \langle \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_l \rangle$ в \mathbb{A}^n можно вычислять по формуле

$$d(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = \sqrt{\frac{\det G(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_l, \overline{PQ})}{\det G(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_l)}},$$

где $\det G$ — определитель матрицы Грама.

5◇9. Как выглядит многомерное обобщение формулы для расстояния между скрещивающимися прямыми, заданными параметрически в \mathbb{A}^3 :

$$d(\ell_1, \ell_2) = \frac{|(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \overline{P_1P_2})|}{|[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]|},$$

где $\ell_1: P_1 + \mathbf{v}_1 t$ и $\ell_2: P_2 + \mathbf{v}_2 t$.

УКАЗАНИЕ. Используйте две предыдущие задачи.

5◇10. Методом наименьших квадратов найдите псевдорешение следующих несовместных систем линейных уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 2y = 1, \\ 2x + 4y = 1, \\ x + y = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = 2, \\ 2x - y = 1, \\ x - 2y = -1, \\ x + y = 2; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 2x - z = 1, \\ y + z = -1, \\ x - y + z = 0, \\ x - z = -1. \end{cases}$$

5◇11. Методом наименьших квадратов найдите интерполяцию (наилучшее среднеквадратичное приближение) функции f , заданной значениями $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 5$:

а) линейным многочленом $b_1x + b_0$; **б)** квадратичным многочленом $b_2x^2 + b_1x + b_0$; **в)** кубическим многочленом $b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$.

В каждом из этих случаев найдите квадратичное отклонение.