Евклидовы пространства II

4◇1. Обоснуйте «геометрические» определения ориентаций в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$:
базис $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ в $\mathbb{R}^2$ положительно ориентирован тогда и только тогда, когда угол от $\boldsymbol{a}$ до $\boldsymbol{b}$ меньше π, (кратчайший поворот от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$ происходит против часовой стрелки);
базис $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ в $\mathbb{R}^3$ положительно ориентирован тогда и только тогда, когда, если смотреть с конца вектора $\boldsymbol{c}$, кратчайший поворот от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$ происходит против часовой стрелки.

4◇2. Стороны BC, CA и AB треугольника ABC разделены точками P, Q и R в отношениях

$$\overline{BP} : \overline{PC} = \lambda, \overline{CQ} : \overline{QA} = \mu \text{и} \overline{AR} : \overline{RB} = \nu.$$

Найти отношение площади ориентированного треугольника PQR к площади ориентированного треугольника ABC.

4◇3. Докажите, что $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\alpha$, где α — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Докажите, что в $\mathbb{R}^2$ эта формула также даёт ориентированную площадь, если в качестве α брать угол от $\boldsymbol{a}$ до $\boldsymbol{b}$.

4◇4. Докажите следующие тождества:
а) $[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$; **б)** $[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] + [\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]] + [\boldsymbol{c}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]] = 0$ (*тождество Якоби*);
в) $([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2$; **г)** $([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]) + ([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}], [\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}]) + ([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}], [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]) = 0$;
д) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{z}) \end{vmatrix}$.

4◇5. В трёхгранном угле $OABC$ пусть даны плоские углы $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$ и противолежащие им двугранные углы A, B, C. Докажите формулы сферической геометрии:
а) *теорема синусов*:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C};$$

б) *теорема косинусов*:

$$\sin\alpha\,\sin\gamma\,\cos B = \cos\beta - \cos\alpha\,\cos\gamma,$$
$$\sin A\,\sin C\,\cos\beta = \cos B + \cos A\,\cos C.$$

4◇6. Даны две пересекающиеся прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ и точка (x_0, y_0), не лежащая ни на одной из этих прямых. Составьте уравнение биссектриссы того угла между прямыми, в котором лежит эта точка.

4◇7. Даны две прямые $2x - y - 1 = 0$ и $11x + 2y + 8 = 0$.
а) Составьте уравнение биссектриссы острого угла между прямыми.
б) Составьте уравнение биссектриссы того угла между прямыми, в котором лежит точка $(1, 2)$.

4◇8. Даны две прямые: $\ell_1\colon x + y = 0$ и $\ell_2\colon x - 2y + 6 = 0$. Найдите такую прямую ℓ_3, что ℓ_2 является биссектриссой угла между ℓ_1 и ℓ_3.

4◇9. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку (x_1, y_1, z_1) и перпендикулярной к прямой $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$.

4◇10. Составьте уравнение перпендикуляра, опущенного из точки (x_1, y_1, z_1) на
а) плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$; **б)** прямую $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$.

4◇11. Найдите уравнение перпендикуляра из точки $P = (1, -1, 2)$ на прямую $\ell\colon \frac{x}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ и найдите расстояние $d(P, \ell)$.

4◇12. Найдите точку, **а)** симметричную точке $(1,3,-4)$ относительно плоскости $3x+y-2z=0$; **б)** симметричную точке $(1,2,3)$ относительно прямой $\frac{x-8}{1}=\frac{y-11}{3}=\frac{z-4}{-1}$.

4◇13. Составьте уравнение ортогональной проекции прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$ на плоскость $5x+6y-2z+1=0$.

4◇14. Составьте уравнение общего перпендикуляра к двум прямым $\frac{x}{1}=\frac{y+4}{3}=\frac{z}{2}$ и $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+3}{-2}$.

4◇15. Составьте уравнение общего перпендикуляра к двум прямым $\frac{x-1}{8}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{1}$ и $x+y=1$, $x+2y+2z=-1$, найдите расстояние между этими прямыми и точки пересечения общего перпендикуляра с этими прямыми.

4◇16. В ориентированном евклидовом n-мерном пространстве *обобщённым векторным произведением* упорядоченного набора из $n-1$ вектора $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{n-1}$ называется вектор $\boldsymbol{c}$, обозначаемый $[\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{n-1}]$ и однозначно задаваемый следующими свойствами:

1) $|\boldsymbol{c}|=\mathrm{vol}_{n-1}(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{n-1})$;
2) $(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{c})=0$ при $i=1,\ldots,n-1$;
3) если векторы $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{n-1}$ линейно независимы, то базис $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{n-1},\boldsymbol{c}$ положительно ориентирован.

Докажите, что обобщённое векторное произведение полилинейно (линейно по каждому аргументу $\boldsymbol{a}_i$) и кососимметрично (меняет знак и перестановке любых двух векторов $\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{a}_j$).