Аффинные пространства

2◇1. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Найти сумму векторов $\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}$.

2◇2. Дан пространственный четырёхугольник $ABCD$. Известны векторы $\overline{AB}=\boldsymbol{u}$ и $\overline{CD}=\boldsymbol{v}$. Найти вектор $\overline{EF}$, соединяющий середины диагоналей AC и BD.

2◇3. Выведите формулы замены координат в аффинном пространстве.

2◇4. Найти геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограммов, вписанных в данный четырехугольник так, что стороны этих параллелограммов параллельны диагоналям четырехугольника.

2◇5. Даны уравнения двух сторон треугольника $2x-y=0$, $5x-y=0$ и уравнение $3x-y$ одной из его медиан. Составить уравнение третьей стороны треугольника, зная, что на ней лежит точка $(3,9)$.

2◇6. Согласно одной из аксиом Евклида, прямая делит плоскость на две полуплоскости, которые определяются условием: отрезок, соединяющий две точки из разных полуплоскостей, пересекает прямую, а отрезок, соединяющий две точки из одной полуплоскости, не пересекает прямую. Пусть прямая $\ell\in\mathbb{A}^2$ задана уравнением $F=Ax+By+C=0$. Докажите, что подмножества $F_+=\{(x,y)\in\mathbb{A}^2\colon Ax+By+C>0\}$ и $F_-=\{(x,y)\in\mathbb{A}^2\colon Ax+By+C<0\}$ суть (открытые) полуплоскости относительно ℓ.

2◇7. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы точка (x_0,y_0) лежала внутри треугольника, образованного прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и $A_3x+B_3y+C_3=0$.

2◇8. Пусть даны две прямые в $\mathbb{A}$, заданные общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2==0$. Найдите необходимые и достаточные условия для того, чтобы эти прямые **а)** пересекались в одной точке; **б)** были параллельны; **в)** совпадали.

2◇9. Пусть даны две прямые $P+\boldsymbol{u}\,t$ и $Q+\boldsymbol{v}\,t$ в $\mathbb{A}^3$. Докажите, что эти прямые скрещиваются (т. е. не имеют общих точек и не параллельны) тогда и только тогда, когда векторы $\overline{PQ}$, $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ некомпланарны. Найдите необходимые и достаточные условия для того, чтобы прямые **а)** пересекались в одной точке; **б)** были параллельны; **в)** совпадали.

2◇10. Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 в $\mathbb{A}^3$ заданы параметрически. Запишите общее уравнение плоскости, содержащей ℓ_1 и параллельной ℓ_2 (предварительно указав условия, при которых такая плоскость существует).

2◇11. Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 в $\mathbb{A}^3$ скрещиваются, и пусть a — точка, не лежащая ни на одной из двух прямых. Всегда ли существует прямая ℓ, проходящая через a и пересекающая каждую из прямых ℓ_1 и ℓ_2? (Если да, привести доказательство, если нет, указать явный контрпример с числами.) Найти уравнение прямой ℓ (параметрическое или как пересечение двух плоскостей), если прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы параметрически.

2◇12. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $(2,3,1)$ параллельно плоскости $x-y-1=0$ и пересекающей ось Oy.

2◇13. Составить уравнения прямой, лежащей в плоскости $x+z=0$ и пересекающей прямую

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-8}{11}=\frac{z-3}{2},$$

но не имеющей общих точек с прямой $x=1+t$, $y=3+4t$, $z=-1-t$.

2◇14. Даны три прямые

$$x = 3 + t, \quad y = -1 + 2t, \quad z = 4t;$$
$$x = -2 + 3t, \quad y = -1, \quad z = 4 - t;$$
$$\begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ x + y - z + 4 = 0. \end{cases}$$

Написать уравнения прямой, пересекающей первые две из указанных прямых и параллельной третьей.

2◇15. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $(1, 2, 3)$ и пересекающей прямые

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}, \qquad \frac{x}{4} = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{3}.$$

2◇16. Показать, что три плоскости $x + 2y - z - 4 = 0$, $3x - 2y + 3z - 6 = 0$ и $4y - 3z + 3 = 0$ образуют призму, и написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения первых двух граней призмы и параллельной третьей.

2◇17. *Собственным пучком плоскостей* называется множество всех плоскостей в $\mathbb{A}^3$, проходящих через фиксированную прямую. *Несобственным пучком плоскостей* называется множество всех плоскостей, параллельных данной плоскости. Аналогично определяются пучки прямых в $\mathbb{A}^2$.

Докажите, что плоскость $F = Ax+By+Cz+D = 0$ принадлежит пучку плоскостей, определяемому двумя несовпадающими плоскостями $F_1 = A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ и $F_2 = A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$ тогда и только тогда, когда $F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$, где $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$. Аналогично для пучков прямых.

2◇18. *Собственной связкой плоскостей* называется множество всех плоскостей в $\mathbb{A}^3$, проходящих через фиксированную точку. *Несобственной связкой плоскостей* называется множество всех плоскостей, параллельных данной прямой.

Докажите, что плоскость $F = Ax+By+Cz+D = 0$ принадлежит связке плоскостей, определяемой тремя плоскостями $F_i = A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, не принадлежащими одному пучку тогда и только тогда, когда $F = \alpha_1F_1 + \alpha_2F_2 + \alpha_3F_3$, или, эквивалентно,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A & B & C & D \end{vmatrix} = 0.$$

2◇19. Опишите все возможные способы взаимного расположения двух плоскостей в $\mathbb{A}^5$.

2◇20. Пусть даны два аффинных подпространства $\mathfrak{B} = P + W$ и $\mathfrak{C} = Q + U$ в $\mathbb{A}^n$. В терминах точек P, Q и линейных пространств W, U запишите необходимое и достаточное условие для того, чтобы $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ пересекались (имели хотя бы одну общую точку).

2◇21. Пусть заданы два аффинных подпространства $\mathfrak{B} = P+\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{b}_5\rangle$ и $\mathfrak{C} = Q+\langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3\rangle$ в аффинном пространстве, причём $\dim \mathfrak{B} = 5$ и $\dim \mathfrak{C} = 3$. С помощью рангов r и R систем векторов $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_5, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3\}$ и $\{\overline{PQ}, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_5, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3\}$ выразить необходимые и достаточные условия того, чтобы данные подпространства

а) скрещивались по точке; **б)** пересекались в одной точке;
в) скрещивались по прямой; **г)** пересекались по прямой;
д) скрещивались по двумерной плоскости; **е)** пересекались по двумерной плоскости;
ж) были параллельны; **з)** совпадали.