Линейные пространства

1◇1. Можно ли задать структуру линейного пространства

а) над каким-либо полем на абелевой группе $\mathbb{Z}$ целых чисел;

б) над $\mathbb{R}$ на вещественных числах $\mathbb{R}$ со следующей операцией умножения на скаляры: $\lambda \cdot u = \lambda^2 u$;

в) над $\mathbb{R}$ на вещественных числах $\mathbb{R}$ со следующей операцией умножения на скаляры: $\lambda \cdot u = \lambda^3 u$?

1◇2. Докажите, что если рассматривать $\mathbb{R}$ как линейное пространство над $\mathbb{Q}$, то векторы 1 и ξ из $\mathbb{R}$ линейно независимы тогда и только тогда, когда ξ иррационально.

1◇3. Докажите, что в пространстве $\widehat{\mathbb{R}}^\infty$ всех бесконечных последовательностей вещественных чисел не существует счётного базиса.

1◇4. Принадлежит ли число $\sqrt[6]{2}$ линейной оболочке чисел 1, $\sqrt{2}$ и $\sqrt[4]{2}$ над полем рациональных чисел?

1◇5. Пусть U, V, W — подпространства в $\mathbb{R}^n$, причём $U \cap V = V \cap W = U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Верно ли, что $\dim(U + V + W) = \dim U + \dim V + \dim W$?

1◇6 (прямая сумма двух подпространств).

Сумма $V_1 + V_2$ подпространств пространства V называется *прямой* (обозначение: $V_1 \oplus V_2$), если для любого вектора $\boldsymbol{v} \in V_1 + V_2$ представление $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, где $\boldsymbol{v}_1 \in V_1$ и $\boldsymbol{v}_2 \in V_2$, единственно. Докажите эквивалентность следующих условий для подпространств V_1, V_2:

а) сумма $V_1 + V_2$ прямая; **б)** $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$.

в) если $\mathbf{0} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, где $\boldsymbol{v}_1 \in V_1$ и $\boldsymbol{v}_2 \in V_2$, то $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$; **г)** $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2)$;

1◇7 (прямая сумма нескольких подпространств).

Суммой нескольких подпространств $V_1, \ldots, V_n$ пространства V называется линейная оболочка их объединения:

$$V_1 + \ldots + V_n = \langle V_1 \cup \ldots \cup V_n \rangle.$$

Сумма $V_1 + \ldots + V_n$ называется *прямой*, если для любого вектора $\boldsymbol{v} \in V_1 + \ldots + V_n$ представление $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_n$, где $\boldsymbol{v}_i \in V_i$, единственно.

Убедитесь, что условия $V_i \cap V_j = \{\mathbf{0}\}$ при $1 \leqslant i < j \leqslant n$ не являются достаточными для того, чтобы сумма $V_1 + \ldots + V_n$ была прямой. Докажите эквивалентность следующих условий:

а) сумма $V_1 + \ldots + V_n$ прямая;

б) $V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_n) = \{\mathbf{0}\}$ для любого $i = 1, \ldots, n$;

в) $V_i \cap (V_{i+1} + \ldots + V_n) = \{\mathbf{0}\}$ для любого $i = 1, \ldots, n-1$;

г) если $\mathbf{0} = \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_n$, где $\boldsymbol{v}_i \in V_i$, то $\boldsymbol{v}_1 = \ldots = \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$;

д) $\dim V_1 + \ldots + \dim V_n = \dim(V_1 + \ldots + V_n)$.

1◇8. Составьте систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку системы векторов:

а) $(1,1,1,1)$, $(1,2,1,3)$; **б)** $(1,1,1,1)$, $(1,1,1,3)$, $(3,-5,7,2)$, $(1,-7,5,-2)$.

1◇9. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2:

а) $L_1 = \langle (1,2,3), (4,3,1), (2,-1,-5) \rangle$, $L_2 = \langle (1,1,1), (-3,2,0), (-2,3,1) \rangle$;

б) $L_1 \colon x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0$, $L_2 = \langle (1,1,1,1,1), (1,0,-1,1,-1), (0,1,-1,-1,1), (-2,1,0,1,-1) \rangle$;

в) $L_1 \colon \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \end{cases}$ $L_2 \colon \begin{cases} x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_5 = 0. \end{cases}$

1◇10. Докажите, что базисы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$ одинаково ориентированы тогда и только тогда, когда существует деформация $\boldsymbol{e}(t)$ базиса $\boldsymbol{e}$, для которой $\boldsymbol{e}(1) = \boldsymbol{e}'$.