НМУ, Комплексно аналитические многообразия и голоморфные расслоения. Листок 1.
Многообразия, расслоения, почти комплексные структуры. 18.09.2017

Большая часть задач предназначена для повторения материала, который мы быстро пролетели, полагая, что он более-менее известен или понятен. Но есть и задачи, которые будут для Вас новыми, поэтому полезно хотя бы пробежать глазами условия всех задач.

Задача 1. Докажите, что комплексные проективные пространства $\mathbb{C}P^n$ и комплексные многообразия Грассмана $G_{k,n}(\mathbb{C})$ действительно являются голоморфными многообразиями. В частности, постройте отображения склейки для случая $n \leqslant k$, который мы не рассмотрели на лекции.

Задача 2. Докажите, что тавтологические (универсальные) расслоения над комлексными проективными пространствами в самом деле являются голоморфными расслоениями.

Задача 3. Докажите, что расслоение $T\mathbb{C}P^n \oplus \underline{1}$ *как C^∞-расслоение* изоморфно расслоению $\underbrace{\xi^* \oplus \cdots \oplus \xi^*}_{n+1 \text{ раз}}$, где $\underline{1}$ тривиальное комплексное расслоение ранга 1, ξ обозначает тавтологическое расслоение, а звездочка обозначает двойственное расслоение (как комплексное!).

Задача 4. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ гладкое вещественное отображение комплексно аналитических многообразий X и Y. Докажите, что это отображение является голоморфным тогда и только тогда, когда

$$df_p(T'_pX) \subset T'_{f(p)}Y,$$

где $df_p : T^{\mathbb{C}}_pX \longrightarrow T^{\mathbb{C}}_{f(p)}Y$ продолжение дифференциала f по $\mathbb{C}$-линейности на комплексификации касательных пространств, а $T'_pX = (T^{\mathbb{C}}_pX)^{1,0}$ голоморфное касательное пространство (аналогично $T'_{f(p)}Y$).

Указание: задача на самом деле из линейной алгебры.

Задача 5*. Напомним, что *числом Кэли* $c = (q_1, q_1)$ называется упорядоченная пара кватернионов. Сложение определяется покоординатно, а умножение по закону

$$(q_1, q_2) \cdot (q'_1, q'_2) = (q_1 q'_1 - \overline{q'_2} q_2, q'_2 q_1 + q_2 \overline{q'_1}).$$

Сопряжённое число Кэли $\bar{c}$ определяется как $\bar{c} = (\bar{q}_1, -q_2)$. Произведение $c\bar{c}$ имеет вид $(a, 0)$, где a действительный неотрицательный кватернион, поэтому мы просто полагаем $c\bar{c} = a$, это число обозначается $|c|^2$ и называется *нормой* c. Легко проверить, что $|c| = 0$ тогда и только тогда, когда $c = 0 = (0, 0)$, а также то, что $1 = (1, 0)$ является правой и левой единицей, а $c^{-1} = \dfrac{\bar{c}}{|c|^2}$ является правым и левым обратным к c. Прямым вычислением можно доказать, что $|cd| = |c| \cdot |d|$, откуда следует, что из $cd = 0$ следует, что $c = 0$ или $d = 0$. Легко проверить, что умножение дистрибутивно относительно сложения. Поэтому множество C чисел Кэли является алгеброй с делением. Отметим, что ассоциативности умножения нет!

Как линейное пространство C изоморфно $\mathbb{R}^8$, числа Кэли единичной нормы образуют сферу $\mathbb{S}^7 \subset \mathbb{R}^8$. Введённый ранее модуль числа Кэли $|c|$ определяет на $\mathbb{R}^8$ евклидову структуру. Рассмотрим на сфере $\mathbb{S}^7$ «экватор» $\mathbb{S}^6$, состоящий из тех точек $\mathbb{S}^7$, которые ортогональны единице.

Проверьте, что умножение справа на элемент $b \in \mathbb{S}^7$ является ортогональным преобразованием, и постройте с помощью умножения чисел Кэли почти комплексную структуру на $\mathbb{S}^6$.