ЛЕКЦИЯ 4

Краткое содержание. Формула Коши–Бине: характеристический многочлен оператора, заданного как многочлен от операторов ранга 1.

Пусть $e \in \mathbb{R}^n$ — вектор, а $\alpha \in \mathbb{R}^n$ — ковектор; рассмотрм линейный оператор $M[e,\alpha] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданный формулой $M[e,\alpha(v) = \langle \alpha, v\rangle e$. Если $e \neq 0$ и $\alpha \neq 0$, то оператор $M[e,\alpha]$ имеет ранг 1. Обратно, любой оператор $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ранга 1 есть $M[e,\alpha]$ для некоторых e и α, которые определены однозначно с точностью до преобразования $e \mapsto te$, $\alpha \mapsto \alpha/t$ с произвольным $t \neq 0$.

Пусть P — некоммутативный многочлен от N переменных степени m, заданный формулой $P(x_1,\dots,x_N) = \sum_{s=1}^m \sum_{1\le i_1,\dots,i_s\le N} c_{i_1,\dots,i_s} x_{i_1}\dots x_{i_s}$ (для удобства считаем, что P не имеет свободного члена). Пусть также G — граф с N вершинами. При фиксированном многочлене P определим *вес* W_P как функцию

$$W_P(a,b) = \sum_{s=1}^m \sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_s\\ i_1=a, i_s=b}} c_{i_1,\dots,i_s} \langle \alpha_{i_2}, e_{i_1}\rangle \langle \alpha_{i_3}, e_{i_2}\rangle \dots \langle \alpha_{i_s}, e_{i_{s-1}}\rangle,$$

где $a, b = 1,\dots,N$. Для произвольного ориентированного графа G с вершинами $1,\dots,N$ вес этого графа определяется формулой

$$W_P(G) = \prod_{i=1}^k W_P(d_i^-, d_i^+) \cdot \det(\langle \alpha_{d_p^-}, e_{d_q^+}\rangle)_{p,q=1}^k. \tag{1}$$

Здесь $d_1,\dots,d_k$ — ребра графа G, и ребро d соединяет вершину d^- с вершиной d^+. Правая часть формулы требует, чтобы ребра графа были занумерованы; нетрудно видеть, однако, что результат от нумерации не зависит. Ориентация ребер, напротив, существенна: поскольку P — некомммутативный многочлен, веса $W_P(a,b)$ и $W_P(b,a)$ в общем случае никак не связаны, и смена ориентации ребер меняет вес графа G.

Пусть $e_1,\dots,e_N \in \mathbb{R}^n$ — векторы, $\alpha_1,\dots,\alpha_N \in \mathbb{R}^n$ — ковекторы; рассмотрим линейный оператор $M \stackrel{\text{def}}{=} P(M[e_1,\alpha_1],\dots,M[e_N,\alpha_N])$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathrm{char}_M(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \mu_k t^{n-k}$ *— характеристический многочлен оператора* M. *Тогда коэффициент* μ_k *равен сумме* $\sum_{G\in\mathcal{D}_k} \mu_P(G)$, *где суммирование производится по множеству* $\mathcal{D}_k$ *графов с вершинами* $1,\dots,N$ *и* k *ребрами таких, что каждая компонента связности графа — либо ориентированный цикл, либо ориентированный путь.*

Множество графов $\mathcal{D}_k$ называют множеством дискретных ориентированных кривых (или одномерных многообразий), по очевидной графической аналогии.

Доказательство. Пусть $u_1,\dots,u_n \in \mathbb{R}^n$ — стандартный базис; зафиксируем последовательность индексов $1 \le j_1 < \dots < j_k \le N$. Тогда k-я внешняя степень оператора M определяется формулой

$$\begin{aligned}
M^{\wedge k}&(u_{j_1}\wedge\dots\wedge u_{j_k}) = (Mu_{j_1})\wedge\dots\wedge(Mu_{j_k}) = \\
&= \sum_{s_1,\dots,s_k=1}^m \sum_{\substack{1\le q\le k\\ 1\le t\le s_q\\ 1\le i_t^{(q)}\le N}} \prod_{q=1}^k \left(c_{i_1^{(q)}\dots i_{s_q}^{(q)}} \prod_{r=2}^{s_q} \langle \alpha_{i_r^{(q)}}, e_{i_{r-1}^{(q)}}\rangle\right) \prod_{q=1}^k \langle \alpha_{i_1^{(q)}}, u_{j_q}\rangle \times e_{i_{s_1}^{(1)}}\wedge\dots\wedge e_{i_{s_k}^{(k)}} = \\
&= \sum_{s_1,\dots,s_k=1}^m \sum_{\substack{1\le q\le k\\ 1\le t\le s_q\\ 1\le i_t^{(q)}\le N\\ i_{s_1}^{(1)}<\dots<i_{s_k}^{(k)}}} \prod_{q=1}^k \left(c_{i_1^{(q)}\dots i_{s_q}^{(q)}} \prod_{r=2}^{s_q} \langle \alpha_{i_r^{(q)}}, e_{i_{r-1}^{(q)}}\rangle\right) \sum_{\sigma\in S_k} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} \prod_{q=1}^k \langle \alpha_{i_1^{(q)}}, u_{j_{\sigma(q)}}\rangle \times e_{i_{s_1}^{(1)}}\wedge\dots\wedge e_{i_{s_k}^{(k)}}
\end{aligned}$$

(S_k — множество перестановок индексов $1,\dots,k$; $\operatorname{sgn}(\sigma)=\pm1$ — четность перестановки $\sigma\in S_k$). Отсюда вытекает, что диагональный элемент матрицы M^k (коэффициент при $u_{j_1}\wedge\dots\wedge u_{j_k}$ в разложении мультивектора $M^{\wedge k}(u_{j_1}\wedge\dots\wedge u_{j_k})$ по базису) равен

$$\sum_{s_1,\dots,s_k=1}^{m}\sum_{\substack{1\le q\le k\\1\le t\le s_q\\1\le i_t^{(q)}\le N\\i_{s_1}^{(1)}<\dots<i_{s_k}^{(k)}}}\prod_{q=1}^{k}\left(c_{i_1^{(q)}\dots i_{s_q}^{(q)}}\prod_{r=2}^{s_q}\langle\alpha_{i_r^{(q)}},e_{i_{r-1}^{(q)}}\rangle\right)\det(\langle\alpha_{i_1^{(q)}},u_{j_r}\rangle)_{q,r=1}^{k}\times\det(\langle u_{j_r},e_{i_{s_q}^{(q)}}\rangle)_{q,r=1}^{k}.$$

Суммирование с соблюдением условия $i_{s_1}^{(1)}<\dots<i_{s_k}^{(k)}$ эквивалентно суммированию по множеству *неупорядоченных* наборов $\{i^{(1)},\dots,i^{(k)}\}$ из k мультииндексов. Таким образом,

(2) $$\mu_k=\operatorname{Tr}M^{\wedge k}=\sum_{s_1,\dots,s_k=1}^{m}\sum_{\substack{\{i^{(1)},\dots,i^{(k)}\}:\\i^{(q)}=(i_1^{(q)},\dots,i_{s_q}^{(q)})\\1\le i_t^{(q)}\le N,\\1\le q\le k,1\le i\le s_q}}\prod_{q=1}^{k}\left(c_{i_1^{(q)}\dots i_{s_q}^{(q)}}\prod_{r=2}^{s_q}\langle\alpha_{i_r^{(q)}},e_{i_{r-1}^{(q)}}\rangle\right)\det(\langle\alpha_{i_1^{(p)}},e_{i_{s_q}^{(q)}}\rangle)_{p,q=1}^{k}$$

Каждый мультииндекс $i_1^{(q)},\dots,i_{s_q}^{(q)}$, $1\le q\le k$, можно изобразить в виде ориентированного графа G с вершинами $1,\dots,N$ и k ребрами $d_1,\dots,d_k$; ребро d_q соединяет вершины $d_q^-\stackrel{\text{def}}{=}i_1^{(q)}$ и $d_q^+\stackrel{\text{def}}{=}i_{s_q}^{(q)}$. Тогда последовательность индексов $i_1^{(q)},\dots,i_{s_q}^{(q)}$ — путь в графе, соединяющий вершины d_q^- и d_q^+. Тогда формула для μ_k принимает вид

(3) $$\mu_k=\sum_{G\text{ — ориентированный граф с }k\text{ ребреми}}W_P(G)$$

Если в формуле (2) есть равенство $i_1^{(q_1)}=i_1^{(q_2)}$ или $i_{s_{q_1}}^{(q_1)}=i_{s_{q_2}}^{(q_2)}$ для каких-либо $q_1\ne q_2$, то матрица в последнем множителе содержит одинаковые строки или столбцы, так что определитель равен нулю. Тем самым вклад в формулу (2) дают только графы, в которых из каждой вершины исходит не более одного ребра и входит не более чем одно ребро. Такие графы — в точности дискретные ориентированные кривые. $\square$

Рассмотрим частный случай, когда $m=1$, то есть $P(x_1,\dots,x_N)=c_1x_1+\dots+c_Nx_N$. В этом случае все пути в определении веса $W_P(a,b)$ имеют длину 1 — то есть, $W_P(a,b)=0$ при $b\ne a$. Следовательно, одномерная дискретная кривая G в основной формуле состоит из N вершин и k петель, присоединенных к вершинам $1\le i_1<\dots<i_k\le N$; вес определяется формулой $W_P(i,i)=c_i$. Окончательно получаем

Следствие 1. *Пусть* $M=\sum_{i=1}^{N}c_iM[e_i,\alpha_i]$. *Тогда* $\operatorname{char}_M(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mu_kt^{n-k}$ *где*

(4) $$\mu_k=\sum_{\{i_1,\dots,i_k\}\subset\{1,\dots,N\}}c_{i_1}\dots c_{i_k}\det\big(\langle e_{i_p},\alpha_{i_q}\rangle\big)_{p,q=1}^{k}.$$

Неинтересный пример. Пусть $u_1,\dots,u_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$; будем считать его ортонормированным (это позволяет не различать векторы и ковекторы). Рассмотрим векторы e_{ij} и α_{ij}, занумерованные парами индексов $i,j=1,\dots,n$; таким образом, общее число пар (e,α) равно $N=n^2$. Оператор $M[e_{ij},\alpha_{ij}]$ — “матричная единица” на месте i,j. Если многочлен $P(x_{11},\dots,x_{nn})\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$, то оператор $M=P(M[e_{11},\alpha_{11}],\dots,M[e_{nn},\alpha_{nn}])$ имеет матрицу c_{ij}.

Согласно следствию 1, характеристический многочлен оператора M равен $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mu_kt^{n-k}$, где $\mu_k=\sum c_{i_1j_1}\dots c_{i_kj_k}\big(\langle e_{i_pj_p},\alpha_{i_qj_q}\rangle\big)_{p,q=1}^{k}$; суммирование происходит по множеству неупорядоченных наборов $(i_1,j_1),\dots,(i_k,j_k)$, где $1\le i_s,j_s\le N$, $s=1,\dots,k$. Каждый такой набор можно изобразить в виде графа F с вершинами $1,2,\dots,n$ и с k ориентированными ребрами (петли разрешаются); матрицу, стоящую в последнем множителе, будем обозначать $A(F)$.

Поскольку $\langle\alpha_{ij},e_{kl}\rangle=\delta_{jk}$, вклад графа F в μ_k равен $c_{i_1j_1}\dots c_{i_kj_k}\det(\delta_{i_pj_q})_{p,q=1}^{k}$. Тем самым все i_p и все j_q должны быть различны — иначе в матрице $A(F)$ есть одинаковые строки или столбцы и $\det A(F)=0$. Кроме того, для каждого q должно существовать единственное $p\stackrel{\text{def}}{=}\sigma(q)$ такое, что $j_q=i_p$ (иначе $A(F)$ содержит нулевую строку). Если оба этих условия выполнены, то $\det A(F)=(-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}$ — четности перестановки σ (проверьте!). Тем самым, формула для μ_k в данном случае — обычная формула, выражающая коэффициент характеристического многочлена произвольной матрицы в виде суммы всех ее миноров соответствующего размера.

Интересным примерам посвящено следующее занятие.