НМУ, Анализ на многообразиях Листок 7. 9 ноября 2017 г.

Интегрирование дифференциальных форм

1. Вычислите интеграл от формы $\omega = x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$ по области $D = \{-1 < u < 1,\ -1 < v < 1\}$ на поверхности $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$.

2. Вычислите непосредственно и с помощью формулы Стокса интегралы:

(а) $\int_L \frac{ydx - xdy}{y^2}$, где L — ориентированный отрезок от точки $(1, 2)$ до точки $(2, 1)$ в $\mathbb{R}^2$;

(б) $\oint_L -x^2 ydx + xy^2 dy$, где L — окружность $x^2 + y^2 = R^2$ в $\mathbb{R}^2$, пробегаемая в положительном направлении.

3. Вычислите

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

для любого контура L. Как ответ соотносится с формулой Стокса?

4. Докажите, что если $M = M_1 \sqcup M_2$ (дизъюнктное объединение). Докажите, что $H^k(M) = H^k(M_1) \oplus H^k(M_2)$.

5. Найдите когомологии плоскости без начала координат $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$.

6. Найдите когомологии двумерного тора $\mathbb{T}^2$.

7. Применив процедуру из доказательства леммы Пуанкаре, найдите форму α такую, что $d\alpha = \omega$, где

$$\omega = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy, \qquad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$