

Дифференциальные формы

1. Найдите значения значения дифференциальных форм ω на указанных векторах:

(а) $\omega = x^2 dx^1$ на векторе $\xi = (1, 2, 3)$;

(б) $\omega = dx^1 \wedge dx^3 + x^1 dx^2 \wedge dx^4$ на упорядоченной паре векторов ξ_1, ξ_2 ;

(в) $\omega = df$, где $f = x^1 + 2x^2 + \dots + nx^n$, $\xi = (1, -1, \dots, (-1)^{n-1})$.

2. (а) Выразите в сферических координатах \mathbb{R}^3 ограничение форм dx и $dy \wedge dz$ на сферу радиуса \mathbb{R} .

(б) Отображение $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ задано в виде $(u, v) \mapsto (u \cdot v, 1) = (x, y)$. Найдите $\varphi^*(ydx)$.

3. Покажите, что гладкая k -мерная поверхность ориентируема тогда и только тогда, когда на ней существует нигде не вырождающаяся k -форма.

4. (а) Докажите, что на $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ существует и единственна с точностью до множителя 2-форма, инвариантная относительно группы $SO(3)$. (б) Выпишите эту форму явно в координатах φ, ψ (широта и долгота). (в) Найдите все $SO(3)$ -инвариантные 2-формы на \mathbb{R}^3 . Проверьте, что при ограничении на S^2 получаются формы, описанные в пункте (б).

5. Докажите, что S^n , T^n и $\mathbb{C}P^n$ ориентируемы при всех n , а $\mathbb{R}P^n$ только при нечетных n .