Касательные векторы к многообразию

1. Опишите в терминах объемлющего пространства $\mathbb{R}^3$ касательное пространство $T_P S^2$ к сфере S^2, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

в точке $P = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$.

2. Рассмотрим декартовы и полярные координаты в плоскости $\mathbb{R}^2$. Запишите векторные поля $X = \frac{\partial}{\partial r}$ и $Y = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ в базисе $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ и найдите их коммутатор посредством вычисления по явной формуле в данном базисе.

3. Чему диффеоморфно касательное расслоение к окружности TS^1?

4. Векторное расслоение $\pi : M \to B$ называется тривиальным, если существует его тривиализация, определенная над всей базой N (оно эквивалентно прямому произведению). Докажите, что для того, чтобы векторное расслоение размерности n было тривиальным необходимо и достаточно, чтобы у него существовал набор из n сечений, линейно независимых над кажной точкой базы.

5. Пусть G — группа Ли, то есть многообразие, являющееся группой с гладкими операциями умножения (на фиксированный элемент) и взятие обратного.

(а) Докажите, что касательное расслоение $TG \to G$ — тривиальное.

(б) Докажите, что группа унитарных 2×2-матриц $SU(2)$ диффеоморфна трехмерной сфере. Докажите непосредственно, что касательное расслоение к трехмерной сфере тривиально (постройте явную тривиализацию).