Многообразия и атласы

1. Определим подмножества $U_+, U_- \in S^2 = \{x^2+y^2+z^2=1\} \subset \mathbb{R}^3$ равенствами

$$U_\pm = \{(x,y,z) \in S^2 \mid z \neq \pm 1\},$$

а также определим отображения $\varphi_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}^2$ стереографическими проекциями из точек $(0,0,\pm 1)$ на плоскость $z=0$. Найдите функцию перехода между картами $(\varphi_\pm, U_\pm)$.

2. Докажите, что внутренности квадрата, круга и полукруга на плоскости попарно диффеоморфны.

3. Пусть M — компактное многообразие со свободным действием конечной группы G. Введите на факторпространстве M/G структуру гладкого многообразия так, чтобы проекция $p : M \to M/G$ была гладким отображением.

4. Определим подмножества $U_i \subset \mathbb{RP}^n$, $i=0,1,\ldots,n$, равенствами

$$U_i = \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{RP}^n \mid x_i \neq 0\}.$$

Определим отображения $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ равенствами

$$\varphi_i(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right).$$

Докажите, что набор отображений φ_i является атласом, задающим на $\mathbb{RP}^n$ структуру гладкого многообразия, и найдите функции перехода.

5. а) Пусть x_0 — некритическая точка гладкой функции $F : U \to \mathbb{R}$, определенной в окрестости U точки $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^m) \in \mathbb{R}^m$. Покажите, что в некоторой окрестности $\tilde{U} \subset U$ точки x_0 можно так ввести криволинейные координаты $(\xi^1, \ldots, \xi^m)$, что множество точек, выделяемое условием $F(x) = F(x_0)$, в этих новых координатах будет задаваться уравнением $\xi^m = 0$.

б) Пусть $\varphi, \psi \in C^k(D, \mathbb{R})$ и пусть в области D $(\varphi(x) = 0) \Rightarrow (\psi(x) = 0)$. Покажите, что если $\operatorname{grad}\varphi \neq 0$, то в D справедливо разложение $\psi = \theta \circ \varphi$, где $\theta \in C^{k-1}(D, \mathbb{R})$.

6. Выпишите явно карты, координаты и функции перехода в Грассманиане $G(2,4,\mathbb{R})$.