НМУ, I курс, 18.09.2017

Листок 2*.

Кватернионы

Рассмотрим множество формальных выражений

$$q = a + bi + cj + dk,$$

где a, b, c, d – вещественные числа. Сложение и умножение определяются также как и для комплексных чисел (т. е. раскрываем скобки как при сложении или умножении обычных «школьных» алгебраических выражений) с учетом следующих равенств:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad \text{и} \quad ijk = -1.$$

Такие формальные выражения q называются кватернионами (от какого слова произошло это название?).

Задача 1. Докажите, что умножение кватернионов является ассоциативным, дистрибутивным, но не является коммутативным. Объясните, почему с двумя мнимыми единицами i и j ввести ассоциативное и дистрибутивное умножение не получится, т. е. нельзя определить умножение (сложение определяется как и раньше) формальных выражений $a + bi + cj$ с условиями $i^2 = j^2 = -1$.

Пусть $q = a + bi + cj + dk$. Положим $\bar{q} = a - bi - cj - dk$.

Задача 2. Проверьте, что

(a) $q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2 := a^2 + b^2 + c^2 + d^2$,

(b) $\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2$ и $\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1$,

(c) $|q_1 q_2| = |q_1||q_2|$ (если возвести это равенство в квадрат и выразить через a, b, c, d, то получится известное «тождество для четырех квадратов»),

Задача 3. Решите уравнения $xq = 1$ и $qx = 1$, если известно, что $|q| \neq 0$.

Будем представлять себе i, j, k как базисные вектора $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$ в $\mathbb{R}^3$ соответственно. Напомним, что для двух векторов $x, y \in \mathbb{R}^3$ скалярным произведением называется число

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = |x||y| \cos \varphi,$$

где φ – угол между векторами, векторным произведением называется вектор $[x, y]$ перпендикулярный векторам x, y, образующий вместе с этими векторами правильную тройку и имеющий длину $|x||y| \sin \varphi$. В координатной записи

$$[x, y] = (x_1 y_3 - y_1 x_3)i + (y_3 x_2 - y_2 x_3)j + (y_2 x_1 - y_1 x_2)k.$$

Задача 4. Пусть $q_1 = x_1 i + x_2 j + x_3 k$ и $q_2 = y_1 i + y_2 j + y_3 k$. Докажите, что

$$q_1 q_2 = -\langle q_1, q_2 \rangle + [q_1, q_2].$$

Пусть $q = a + q'$, где $q' = x_1 i + x_2 j + x_3 k$. Предположим, что $|q| = 1$. Тогда $a^2 + |q'|^2 = 1$ и, следовательно, $a = \cos \varphi$ и $|q'| = \sin \varphi$. Таким образом, $q = \cos \varphi + p \sin \varphi$, где $|p| = 1$.

Задача 5. Пусть вектор $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ перпендикулярен p. Докажите, что вектор qv получается из v поворотом на угол φ вокруг оси p.

Задача 6. Пусть вектор v пропорционален p. Докажите, что $qv\bar{q} = v$.

Задача 7. Пусть $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ – произвольный вектор из $\mathbb{R}^3$. Докажите, что вектор $qv\bar{q}$ получается из вектора v поворотом на угол 2φ вокруг оси p. (Сравните это утверждение с геометрической интерпретацией умножения комплексных чисел.)

Задача 8. Докажите, что в $\mathbb{R}^3$ композиция двух поворотов с одним центром является поворотом. Объясните как найти ось и угол этого поворота, если известны оси и углы поворотов, композицией которых он является.

Теорема Фробениуса

Через $\mathbb{R}^n$ обозначим множество упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вещественных чисел x_i, на котором естественным образом вводится сложение и умножение на число:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Например, $\mathbb{R}^2$ – вектора на плоскости, $\mathbb{R}^3$ – вектора в пространстве. Предположим, что определено умножение векторов так, что операция умножения дистрибутивна и ассоциативна. Кроме того, есть единица $\mathbf{1}$ и у каждого отличного от нуля вектора есть обратный, т. е. можно делить. Будем всегда отождествлять векторы вида $\alpha\mathbf{1}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, с вещественными числами. Далее, когда говорим об операции умножения, то всегда имеем ввиду именно такое умножением. Такую операцию умножения в $\mathbb{R}^2$ задает правило умножения комплексных чисел. Аналогичным образом обстоит дело в $\mathbb{R}^4$, где операцию умножения в $\mathbb{R}^4$ задает правило умножения кватернионов.

Задача 9. Докажите, что для всякого $a \in \mathbb{R}^n$ найдется ненулевой многочлен P (с вещественными коэффициентами) такой, что $P(a) = 0$. (Указание: рассмотреть векторы $\mathbf{1}, a, a^2, \ldots, a^n$).

Выберем среди всех ненулевых многочленов P таких, что $P(a) = 0$, многочлен минимальной степени. Такой многочлен назовем минимальным аннулирующим для вектора a. Будем всегда предполагать, что старший коэффициент равен 1.

Задача 10. Докажите, что минимальный аннулирующий многочлен не раскладывается в произведение многочленов меньшей (но отличной от нуля) степени.

Таким образом, минимальный аннулирующий имеет вид $t - \alpha$ или $t^2 + \beta t + \alpha$. Если аннулирующий многочлен для a линейный $t - \alpha$, то $a = \alpha\mathbf{1}$ является вещественным числом. Если аннулирующий многочлен для a квадратичный, то a является суммой некоторого вещественного числа $\alpha_1\mathbf{1}$ и вектора v такого, что $v^2 = \alpha_2\mathbf{1}$ и $\alpha_2 < 0$.

Пусть u, v таковы, что $u^2 \leq 0$ и $v^2 \leq 0$. Ясно, что $(\alpha u)^2 \leq 0$ для всякого вещественного числа α.

Задача 11. Докажите, что если u и v непропорциональны, то u нельзя представить в виде $\alpha v + \beta$.

Задача 12. Докажите, что если u и v непропорциональны, то $(u+v)^2 \leq 0$. (Указание: $u + v$ и $u - v$ удовлетворяют квадратным уравнениям)

Таким образом, элементы множества $N \subset \mathbb{R}^n$, состоящего из векторов v таких, что $v^2 \leq 0$, можно складывать и умножать на числа. Более того, всякий вектор представляется в виде суммы «вещественного числа» и вектора из N.

Задача 13. Пусть два вектора $u, v \in N$ непропорциональны. Докажите существование вещественных чисел α, β таких, что для вектора $w = \alpha v + \beta u$ верны равенства: $uw = -vw$ и $w^2 = -\mathbf{1}$.

Задача 14. Докажите, что при $n \geq 3$ нельзя на $\mathbb{R}^n$ определить коммутативное умножение.

Задача 15. (Теорема Фробениуса) Докажите, что умножение можно ввести только при $n = 1$, $n = 2$ и $n = 4$, причем во втором и третьем случаях получаем множество комплексных чисел и кватернионов соответственно.