НМУ 22 ноября 2017
Алгебра 1 Листок 9

Определители

Задача 1. Пусть $A \in M_n(\mathrm{k})$ — антисимметричная матрица и n нечётно. Покажите, что $\det(A) = 0$.

Задача 2. a) , b°) , c) Вычислите определители матриц

$$\begin{pmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ & & & \dots & & \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 3 (Определитель Вандермонда). Покажите, что

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots x_2^{n-1} & \\ & & & \dots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots x_n^{n-1} & \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Подсказка: обе части равенства — многочлены от x_i.

Пусть $f(x) = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0$ и $g(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ — многочлены. Определитель матрицы размера $n+m$, где m строк содержат коэффициенты f, а n строк содержат коэффициенты g:

$$\det \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \dots & \dots & b_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_m & \dots & \dots & b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0 \end{pmatrix},$$

называется *результантом* f и g. Обозначение: $Res(f,g)$.

Задача 4. Покажите, что $Res(f,g) \neq 0 \iff$ любой многочлен степени $< m+n$ представляется в виде $uf + vg$, где u, v — многочлены степеней $< m$ и $< n$ соответственно, $\iff$ НОД$(f,g) = 1$.

Задача 5. Пусть многочлен f степени n имеет корни $x_1, \dots, x_n$, а многочлен g степени m имеет корни $y_1, \dots, y_m$ (с учётом кратностей). Покажите, что

$$Res(f,g) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (x_i - y_j) = a_n^m \prod_{i=1}^{n} g(x_i) = (-1)^{mn} b_m^n \prod_{j=1}^{m} f(y_j).$$

Дискриминантом многочлена $f(x) = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0$ назовём

$$Discr(f) := (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{-1} Res(f, f').$$

Задача 6. a) Пусть $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)$. Покажите, что $Discr(f) = \prod_{i<j}(a_i - a_j)^2$.

b) Пусть $f(x) \in \mathbb{C}[x]$. Покажите, что $Discr(f) = 0 \iff f$ имеет кратный корень.

c) Покажите, что $Discr(f)$ — многочлен от $a_0, a_1, \dots, a_n$ с целыми коэффициентами. Найдите

d°) $Discr(ax^2 + bx + c)$,

e°) $Discr(x^3 + px + q)$.