НМУ
Алгебра 1

4 октября 2017
Листок 4

Кольца и идеалы

Задача 1. Покажите, что множество

$$\left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b\,\text{нечётно}\right\} \subset \mathbb{Q}$$

является евклидовым кольцом с нормой $N(2^k \cdot \frac{a}{b}) = 2^k$, где a, b нечётны. Опишите обратимые и неприводимые элементы этого кольца. Как выглядит в нём каноническое разложение?

Задача 2. Покажите, что кольцо $\mathbb{R}[x, y]$ не является евклидовым (ни с какой нормой).

Задача 3. Пусть R — коммутативное кольцо без делителей нуля. Докажите, что:
a°) если R евклидово, то R — кольцо главных идеалов;

b) если R — кольцо главных идеалов, то R факториально. Не забудьте доказать существование!

Задача 4. Обозначим $\xi = \frac{1+\sqrt{-19}}{2}$ и $\mathbb{Z}[\xi] = \{a + b\xi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$. (Проверьте, что $\mathbb{Z}[\xi]$ — кольцо!)

a) Покажите, что $\mathbb{Z}[\xi]$ не является евклидовым (ни с какой нормой).

b) Покажите, что $\mathbb{Z}[\xi]$ является кольцом главных идеалов.

Задача 5°. a) Вычислите сумму $(a)+(b)$, произведение $(a)(b)$ и пересечение $(a)\cap(b)$ главных идеалов (a) и (b) в $\mathbb{Z}$.

b) Что можно сказать в случае произвольного факториального кольца? кольца главных идеалов?

Задача 6°. Пусть K — поле, $a \in K$ — элемент.

a) Постройте изоморфизм колец $K[x]/(x-a) \to K$.

b) Пусть $a_1, \ldots, a_n \in K$ — различные элементы. Постройте изоморфизм колец $K[x]/((x-a_1)\ldots(x-a_n)) \to K^n = K \times \ldots \times K$ (n раз).

c) Покажите, что для любых $b_1, \ldots, b_n \in K$ существует и единствен такой многочлен $P \in K[x]$, что $\deg P < n$ и $P(a_i) = b_i$ при всех i. Он назывется *интерполяционным многочленом.*

Определим производную многочлена $P \in K[x]$ формулой

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1}.$$

Кратная производная определяется по индукции: $P^{(0)} = P, P^{(k)} = (P^{(k-1)})'$.
В следующих двух задачах мы предполагаем, что характеристика поля K равна нулю.

Задача 7. a) Проверьте свойства производной:
$(P+Q)' = P' + Q'$, $(P \cdot Q)' = P' \cdot Q + P \cdot Q'$, $(c \cdot P)' = c \cdot P'$, где $c \in K$.

b) Покажите, что для многочлена P степени $\leqslant n$ и $a \in K$ имеет место разложение Тейлора:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

c) Проверьте, что $P \,\vdots\, (x-a)^k$ тогда и только тогда, когда $P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(k-1)}(a) = 0$.

Задача 8. (Интерполяционный многочлен Эрмита) Пусть $a_1, \ldots, a_n \in K$ — различные элементы, а $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ — числа. Положим $Q(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_n)^{k_n}$.

a) Постройте изоморфизм колец $K[x]/(Q(x)) \to K[x]/((x-a_1)^{k_1}) \times \ldots \times K[x]/((x-a_n)^{k_n})$.

b) Покажите, что для любых $b_{ij} \in K$, где $i = 1 \ldots n$, $j = 0 \ldots k_i - 1$, существует и единствен такой многочлен $P \in K[x]$, что $P^{(j)}(a_i) = b_{ij}$ при всех i, j и $\deg P < k_1 + \ldots + k_n$.

Задача 9. Пусть K — поле, а $P \in K[x]$ — неприводимый многочлен.

a) Покажите, что кольцо $K[x]/(P(x))$ является полем.

b) Покажите, что $\mathbb{R}[x]/(P(x)) \cong \mathbb{C}$, где $P \in \mathbb{R}[x]$ — неприводимый многочлен степени 2.