

## Представления симметрических групп

▷ (Вырожденная аффинная) алгебра Гекке  $H(2)$  — это алгебра с образующими  $Y_1, Y_2$  и  $s$  и соотношениями  $Y_1Y_2 = Y_2Y_1, s^2 = 1, sY_1 - Y_2s = 1$ .

**Задача 8.1.** а) Представьте  $\mathbb{C}[S_3]$  как фактор алгебры  $H(2)$ .

б) Докажите, что размерность неприводимого представления алгебры  $H(2)$  не превышает двух.

в) Опишите явно (задайте матрицами каждое по одному разу) все неприводимые представления  $H(2)$ .

**Задача 8.2.** а) Для представления, соответствующего диаграмме  $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ , выпишите матрицы действия кокстеровских образующих в базисе Гельфанда–Цетлина.

**Задача 8.3.** Докажите, что (при описанном на лекциях соответствии между диаграммами Юнга и неприводимыми представлениями симметрической группы) тензорное умножение на знаковое представление соответствует сопряжению диаграммы Юнга.

**Задача 8.4\*.** Докажите, что представление  $S_n$ , соответствующее крюку высоты  $l + 1$  из  $n$  клеток, — это  $l$ -я внешняя степень тавтологического представления.