Теория категорий

Задача 7.1. Пусть $f\colon M \to N$ — гомоморфизм модулей. Опишите конечный объект в следующей категории. Объекты — пары (X, u), где X — модуль, а $u\colon X \to M$ — такой гомоморфизм, что $fu = 0$. Морфизмы из (X_1, u_1) в (X_2, u_2) — такие гомоморфизмы $g\colon X_1 \to X_2$, что $u_2 g = u_1$.

Задача 7.2. Пусть X — топологическое пространство, Y — множество, $f\colon X \to Y$ — отображение. Опишите начальный объект в следующей категории. Объекты — пары (Z, v), где Z — топологическое пространство, $v\colon Y \to Z$ — отображение множеств такое, что композиция vf непрерывна. Морфизмы из (Z_1, v_1) в (Z_2, v_2) — такие непрерывные отображения $g\colon Z_1 \to Z_2$, что $gv_1 = v_2$.

Задача 7.3. Опишите произведение и копроизведение в категории

а) коммутативных колец;

б*) колец;

в) частично упорядоченных множеств;

г) где объекты — элементы некоторого частично упорядоченного множества X, из x в y есть единственный морфизм, если $x \le y$;

д) где объекты — натуральные числа, из m в n есть единственный морфизм, если $m|n$.

Задача 7.4. Пусть $A \to B$ — гомоморфизм коммутативных колец. Докажите, что левым сопряженным к функтору забывания из B-модулей в A-модули будет функтор расширения скаляров $M \mapsto B \otimes_A M$, а правым сопряженным — функтор $M \mapsto \mathrm{Hom}_A(B, M)$.

Задача 7.5. Опишите левый сопряженный функтор к функтору забывания из

а) ассоциативных коммутативных алгебр над полем k в k-векторные пространства;

б) ассоциативных алгебр над полем k в k-векторные пространства;

в) полей в категорию ассоциативных коммутативных колец без делителей нуля, где морфизмы — инъективные гомоморфизмы колец;

г) топологических пространств в множества. В этом пункте найдите также правый сопряженный.

Задача 7.6. Докажите, что сопряженность функторов $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $R\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ равносильна существованию морфизмов функторов $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to RL$ (единица) и $LR \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ (коединица) таких, что композиции $L \to LRL \to L$ и $R \to RLR \to R$ тождественны.