Теория Галуа I

▷ Начиная с этого листка можно пользоваться основной теоремой теории Галуа.

Задача 4.1. Пусть L/K — расширение Галуа.
а) Если $\mathrm{Gal}(L/K) = \mathbb{Z}/2$ (и $\mathrm{char}\, K \neq 2$), то $L = K(\sqrt{a})$.
б) Если $\mathrm{Gal}(L/K) = \mathbb{Z}/p$ (и $K \ni \zeta_p$, а $\mathrm{char}\, K \neq p$), то $L = K(\sqrt[p]{a})$.
Указание. При действии образующей σ группы Галуа элемент $\sqrt[p]{a}$ должен домножаться на ζ_p. Как получить элемент с таким свойством из базиса $\alpha, \sigma\alpha, \sigma^2\alpha, \ldots$?

Задача 4.2. Пусть L — поле разложения неприводимого над K ($\mathrm{char}\, K \neq 2, 3$) многочлена 3 степени с дискриминантом D. Найдите группу Галуа расширения а) $L/K(\sqrt{D})$; б) L/K.

Задача 4.3. Пользуясь предыдущими задачами, объясните, как решать кубическое уравнение в радикалах. (Выписывать явную формулу до конца не обязательно.)

Задача 4.4. Вспомнив, что $S_4/V_4 \cong S_3$, придумайте подходящие многочлены от $x_1, \ldots, x_4$, инвариантные относительно действия V_4, и объясните, как решать уравнения 4 степени.

* * *

Задача 4.5. Найдите группу Галуа расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{n} + \sqrt{m})/\mathbb{Q}$ и все его подрасширения.

Задача 4.6. Пусть $n_1, \ldots, n_k$ — такой набор целых чисел, что никакое из непустых подмножеств не дает в произведении полный квадрат.
а) Докажите, что степень расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, \ldots, \sqrt{n_k})$ равна 2^k, найдите его группу Галуа, опишите все подрасширения. (Удобно доказывать все сразу, используя индукцию по k и предыдущую задачу.)
б) $\mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, \ldots, \sqrt{n_k}) = \mathbb{Q}(\sqrt{n_1} + \ldots + \sqrt{n_k})$.

Задача 4.7. Найдите все подрасширения а) $K(\sqrt[n]{a})/K$, если $\mathrm{char}\, K = 0$, $K \ni \zeta_n$; б) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$; в) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{-1})/\mathbb{Q}$.