Приближение чисел рациональными

▷ Все числа в этом листке можно считать вещественными.

Задача 2.1. а) Иррациональное число может быть сколь угодно хорошо приближено дробью в том смысле, что для любого $c > 0$ можно найти дробь p/q, для которой

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q}.$$

б*) Для любого иррационального числа существует бесконечно много таких приближений p/q, что

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

▷ В последнем утверждении константу в правой части можно уменьшить до $1/\sqrt{5}$ — но (как можно увидеть, взяв в качестве α золотое сечение) не дальше.

▷ Число α называется *n-неприближаемым*, если существует такая константа $c > 0$, что для всякой дроби p/q, не равной α, имеет место равенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}.$$

Задача 2.2. а) Рациональные числа 1-неприближаемы.
б) Алгебраическое число степени n является n-неприближаемым.

Задача 2.3. Число $e := \sum \frac{1}{k!}$ иррационально, а число $\sum \frac{1}{10^{k!}}$ трансцендентно.

▷ Теорема Туэ–Зигеля–Рота (намного более сложная) утверждает, что, на самом деле, любое алгебраическое число является $(2+\varepsilon)$-неприближаемым для любого $\varepsilon > 0$.

Задача 2.4. а) Уравнение $x^n + y^n = m$ $(n > 1)$ имеет лишь конечное число целых решений.
б) Из теоремы Туэ–Зигеля–Рота следует, что уравнение $x^3 - ay^3 = c$ $(a \neq b^3)$ имеет лишь конечное число целых решений.