Алгебраическое замыкание и целое замыкание

▷ Говорят, что элемент α поля K *алгебраичен* над полем $k \subset K$, если он является корнем многочлена с коэффициентами из k.

Задача 1.1. а) Элемент α алгебраичен над k тогда и только тогда, когда $k(\alpha)$ — конечное расширение поля k.

б) Элемент α алгебраичен над k тогда и только тогда, когда он лежит в конечном расширении поля k.

в) Элементы поля K, алгебраические над k, образуют поле.

▷ Пусть A — подкольцо поля K. Элемент $\alpha \in K$ называется *целым* над A, если он является корнем многочлена с коэффициентами из A и старшим коэффициентом 1. Множество всех целых элементов называется *целым замыканием* A в K.

Задача 1.2. а) Элемент α цел над A тогда и только тогда, когда $A[\alpha]$ — конечнопорожденный A-модуль.

б) Элемент α цел над A тогда и только тогда, когда существует такой конечнопорожденный ненулевой A-подмодуль $M \subset K$, что $\alpha M \subset M$.

в) Целое замыкание является кольцом.

Задача 1.3. Найдите целое замыкание в поле частных а) $\mathbb{Z}[2i]$; б) $k[x, y]/(y^2 - x^3)$.

▷ Целое замыкание $\mathbb{Z}$ в числовом поле (конечном расширении $\mathbb{Q}$) называется *кольцом целых* этого поля. Например, $\mathbb{Z}$ — это кольцо целых поля $\mathbb{Q}$.

Задача 1.4. Найдите кольцо целых поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Задача 1.5. а) Факториальное кольцо целозамкнуто в своем поле частных.

б) Приведите пример кольца целых числового поля, не являющегося факториальным.

Можно доказать, тем не менее, что в кольце целых числового поля есть однозначное разложение *идеалов* на простые.