

Образцы экзаменационных задач

На письменном экзамене продолжительностью 4 часа дается 15 связанных друг с другом вопросов. В квадратных скобках указано число очков за каждый вопрос. Эти числа заранее сообщаются экзаменуемому.

Вариант 1.

$$\ddot{x} = -\sin x + \varepsilon \cos t. \quad (1)$$

I. Пусть $\varepsilon = 0$.

- 1) Линеаризовать в точке $x = \pi$, $\dot{x} = 0$ [1].
- 2) Устойчиво ли это положение равновесия [1]?
- 3) Найти матрицу Якоби преобразования фазового потока за время $t = 2\pi$ в точке $x = \pi$, $\dot{x} = 0$ [3].
- 4) Найти производную решения с начальным условием $x = \pi$, $\dot{x} = 0$ по параметру ε при $\varepsilon = 0$ [5].
- 5) Нарисовать графики решения и его производной по t при начальном условии $x = 0$, $\dot{x} = 2$ [3].
- 6) Найти это решение [3].

II. Пусть (2) — уравнение в вариациях вдоль указанного в п. 5 решения.

- 7) Имеет ли уравнение (2) неограниченные решения [8]?
- 8) Имеет ли уравнение (2) ненулевые ограниченные решения [8]?
- 9) Найти определитель Вронского фундаментальной системы решений уравнения (2), зная, что $W(0) = 1$ [5].
- 10) Выписать явно уравнение (2) и решить его [10].
- 11) Найти собственные числа и векторы оператора монодромии для уравнения в вариациях вдоль решения с начальным условием $x = \pi/2$, $\dot{x} = 0$ [16].
- 12) Доказать, что уравнение (1) имеет 2π -периодическое решение, гладко зависящее от ε и обращающееся в $x = \pi$ при $\varepsilon = 0$ [6].
- 13) Найти производную этого решения по ε при $\varepsilon = 0$ [6].

III. Рассмотрим уравнение $u_t + uu_x = -\sin x$.

- 14) Написать уравнение характеристик [2].
- 15) Найти наибольшее значение t , при котором решение задачи Коши с $u|_{t=0} = 0$ продолжается на $[0, t)$ [8].