НМУ, Анализ на многообразиях 7-14 декабря 2017 г.

Экзамен

Экзамен является домашним. Решения задач необходимо записать и принести на занятие 14 декабря в 17:30 или сдать в учебную часть до этого срока. Решать задачи необходимо самостоятельно!

1. Пусть D — ограниченная область с кусочно гладкой границей ∂D, ориентированной так, что область D находится (локально) слева от касательного вектора к ∂D.

(а) Докажите, что площадь области D можно вычислять по любой из формул

$$\mu(D) = \oint_{\partial D} x dy = -\oint_{\partial D} y dx = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x dy - y dx.$$

(б) Найдите площадь области, ограниченной кривыми $x = t^2$, $y = t^3$, $t \in \mathbb{R}$ и $x = 1$.

2. Найдите образы векторного поля $Y = x\frac{\partial}{\partial x}$ и дифференциальной формы $\omega = y\mathrm{d}y$ под действием потока

$$\xi_t : (r, \varphi) \mapsto \left(r + r\frac{\sin t}{2}; \varphi + \pi \operatorname{tg} \frac{t}{4} \right)$$

за время $t = \pi$.

3. Покажите, что распределение, заданное формой $\omega = zdx + zdy - dz$ в $\mathbb{R}^3$ удовлетворяет критерию интегрируемости Фробениуса и найдите интегральное многообразие, проходящее через точку $(0, 0, c)$.

4. (а) Пусть $f : S^n \to S^n$ — гладкое отображение. Докажите, что $\int_{S^n} f^*\omega = \deg(f) \int_{S^n} \omega$, где число $\deg(f)$ не зависит от выбора формы $\omega \in \Omega^n(S^n)$. (б) Пусть $c \in S^n$ — регулярное значение отображения f, т.е. если $x \in f^{-1}(c)$, то $\det f'(x) \neq 0$. Докажите, что прообраз $f^{-1}(c) \subset S^n$ конечен. (в) Пусть c — регулярное значение f, и $f^{-1}(c) = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Докажите, что $\deg f = \sum_{i=1}^N \operatorname{sign} \det f'(x_i)$. (*Указание: Для решения пункта 4в рассмотрите форму, носитель которой лежит в малой окрестости c, и примените к ней утверждение пункта 4а.*)

5. Пусть M — связное многообразие. Докажите, что для любых двух точек $x, y \in M$ существует диффеоморфизм $f : M \to M$ такой, что $f(x) = y$.

6. Найдите когомологии де Рама плоскости с N выколотыми точками $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \ldots, x_N\}$.

7. Верно ли, что у типичного гладкого отображения $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (а) если $\operatorname{rk} f'(a) = 1$, то на $\mathbb{R}^2$ существуют координаты (x_1, x_2) в окрестности U, $a \in U$ и (y_1, y_2) в окрестности $V \subset f(U) \ni f(a)$ такие, что $y_1(f(b)) = x_1^2(b)$ и $y_2(f(b)) = x_2(b)$ для всех $b \in f^{-1}(V) \subset U$? (То есть в этих координатах отображение выглядит как $(x_1, x_2) \mapsto (x_1^2, x_2)$.) (б) Множество точек $a \in \mathbb{R}^2$ таких, что $\operatorname{rk} f'(a) = 1$, является гладкой кривой? (в) Точки a, в которых $f'(a) = 0$, изолированы?