Теория препятствий

Задача 11.1. а) $H^1(X;\mathbb{Z}) \cong [X, S^1]$.

б) Если X — n-мерный клеточный комплекс, то $H^n(X;\mathbb{Z}) \cong [X, S^n]$ (“теорема Хопфа”).

Задача 11.2. а) Приведите пример отображения $f\colon X^n \to Y$, для которого препятствие в группе $H^{n+1}(X, \pi_n Y)$ равно нулю, но которое не продолжается до отображения $X^{n+1} \to Y$.

б) Докажите, что, тем не менее, если препятствие равно 0, то $f|_{X^{n-1}}$ может быть продолжено на $(n+1)$-остов.

▷ Как мы видели в листке 3, $\mathbb{R}P^\infty = K(\mathbb{Z}/2, 1)$, $\mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$.

Задача 11.3. Пространство n-элементных подмножеств $\mathbb{R}^\infty$ является пространством типа $K(S_n, 1)$.

* * *

▷ На лекции рассказывалось о препятствиях к продолжению отображения $X \to Y$, лежащих в группах $H^{n+1}(X, \pi_n Y)$. Аналогичным образом при продолжении сечений расслоения $F \to E \to B$ возникают препятствия в группах $H^{n+1}(B, \pi_n F)$.

Задача 11.4. Докажите при помощи теории препятствий, что любое векторное расслоение на S^3 тривиально. (Указание: тривиализация векторного расслоения — это то же самое, что сечение ассоциированного расслоения реперов.)

Задача 11.5. Если слой F является $(n-1)$-связным, то препятствие $H^{n+1}(B, \pi_n F)$ не зависит от выбора сечения на n-остове.

Задача 11.6. Что за класс когомологий получится, если применить конструкцию из предыдущей задачи к сферизации касательного расслоения?