Когомологии и многообразия

▷ Все многообразия в этом листке компактные связные без края.

Задача 10.1. Как было объяснено на лекции, умножение в когомологиях многообразия соответствует просто пересечению циклов. Пользуясь этим докажите, что

$$\begin{array}{lcl} H^\bullet(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2) & \cong & \mathbb{Z}/2[a]/(a^{n+1}) \quad (\deg a = 1), \\ H^\bullet(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z}) & \cong & \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1}) \quad (\deg x = 2) \end{array}$$

(а также решите задачу 9.3, если еще не сделали этого).

Задача 10.2. а) Комплексная гиперповерхность в $\mathbb{C}P^n$ задана однородным полиномиальным уравнением. Какой класс когомологий она представляет?

б) Докажите, что если система из n полиномиальных уравнений степеней $d_1, \ldots, d_n$ на n неизвестных имеет конечное число решений, то этих решений не более $d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$.

Задача 10.3. Если M — нечетномерное многообразие, то

а) $\chi(M) = 0$; б) на M есть векторное поле без особых точек.

Задача 10.4. Фундаментальная группа неориентируемого 3-многообразия бесконечна.

Задача 10.5. Пусть M — односвязное трехмерное многообразие. Докажите, что существует отображение $S^3 \to M$ индуцирующее изоморфизм всех групп гомологий.

(По относительной теореме Гуревича отсюда сразу следует, что такое многообразие гомотопически эквивалентно сфере.)

▷ Пусть $f\colon M^m \to N^n$ отображение ориентированных многообразий. Двойственность Пуанкаре позволяет определить *прямой образ* в когомологиях:

$$H^\bullet(M) \cong H_{m-\bullet}(M) \xrightarrow{f_*} H_{m-\bullet}(N) \cong H^{\bullet-(m-n)}(N).$$

(В когомологиях де Рама это отображение соответствует *послойному интегрированию* форм.)

Задача 10.6. Пусть $f\colon E \to B$ — d-листное накрытие ориентированных многообразий. Тогда отображение $f_* f^*\colon H^\bullet(B) \to H^\bullet(B)$ совпадает с умножением на d, а $H^\bullet(B;\mathbb{Q})$ является прямым слагаемым в $H^\bullet(E;\mathbb{Q})$.

(Если хотите, решайте задачу для произвольного отображения степени d, во второй части считая, что $d \neq 0$.)