Гомологии (продолжение)

Задача 6.1. Отображение $S^1 \times S^1 \to S^1 \wedge S^1 = S^2$ индуцирует нулевой гомоморфизм во всех гомотопических группах, но не гомотопно нулю.

Задача 6.2. Пространства $S^2 \times \mathbb{R}P^3$ и $S^3 \times \mathbb{R}P^2$ гомотопически не эквивалентны (хотя и имеют, как обсуждалось в задаче 3.2, одинаковые гомотопические группы).

Задача 6.3. Приведите пример, в котором гомоморфизм Гуревича $\pi_n(X) \to H_n(X)$ $(n \geqslant 2)$ не инъективен; не сюръективен.

* * *

Задача 6.4. Для симплициальной пары $H(X, A) \cong \tilde{H}(X/A)$.

Задача 6.5. Если гомоморфизм 5-членных точных последовательностей является изоморфизмом во всех членах, кроме, быть может, среднего, то он является изоморфизмом и в среднем члене. (Из двух аналогичных проверок — инъективности и сюръективности f_3 — можете ограничиться одной.)

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

Задача 6.6. а) Если существует отображение симплициальных пар $(X, A) \to (Y, B)$, индуцирующее гомотопические эквивалентности $X \to Y$ и $A \to B$, то $H(X, A) \cong H(Y, B)$.

б) Приведите пример таких симплициальных пар (X, A) и (Y, B), что $X \approx Y$, $A \approx B$, но $H(X, A) \ncong H(Y, B)$.

* * *

Задача 6.7. Докажите при помощи точной последовательности Майера–Виеториса, что $H_k(\Sigma X) = \tilde{H}_{k-1}(X)$.

Задача 6.8. Докажите при помощи точной последовательности Майера–Виеториса, что гомологии дополнения к зацеплению в S^3 зависят только от числа компонент зацепления. (Про задачу 4.3 можно думать как про частный случай этой ситуации.)