

## Задачи по группам и алгебрам Ли листок 4, 10.11.2016

Для получения оценки 10 по данному листку необходимо сдать 80% пунктов задач (остальные оценки высчитываются пропорционально). Дедлайн 26 ноября. Задачи, сданные после дедлайна, стоят на 25% меньше. Итоговая оценка вычисляется по формуле  $0.7$  средней оценки за листки +  $0.7$  оценки за экзаменационную работу.

1. Пусть  $G$  — связная группа Ли,  $T : G \rightarrow GL(V)$  — ее неприводимое представление в конечномерном пространстве  $V$ . Докажите, что соответствующее представление в  $V$  алгебры Ли группы  $G$  также неприводимо.
2. Опишите неприводимые представления группы  $SO(3)$ .
3. Рассмотрим алгебру Ли с базисом  $X, Y, Z$  и скобкой  $[X, Y] = Z$ ,  $[X, Z] = [Y, Z] = 0$  (трехмерная алгебра Гейзенберга). Докажите, что все ее неприводимые представления одномерны. Указание: если  $A$  и  $B$  — операторы в конечномерном векторном пространстве, то след оператора  $AB - BA$  равен нулю.
4. Докажите, что группа  $SU(2)$  как многообразие есть сфера  $S^3$  и что при отождествлении  $SU(2) = S^3$  мера Хаара совпадает с естественной мерой на сфере.
5. Вычислите левоинвариантную меру Хаара на группе  $GL(N, \mathbb{C})$ . Является ли эта группа унимодулярной?

Напомним, что модулярная функция  $\Delta(g)$  на группе Ли  $G$  определяется из условия

$$\int_G f(xg^{-1})\mu_L(dx) = \Delta(g) \int_G f(x)\mu_L(dx),$$

где  $\mu_L$  — левоинвариантная мера Хаара.

6. Вычислите функцию  $\Delta(g)$  для группы матриц вида  $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , где  $a$  и  $b$  — комплексные числа,  $a \neq 0$ .
7. Докажите, что для произвольной группы Ли  $G$  модулярная функция дается формулой  $\Delta(g) = |\det \text{Ad}(g)|^{-1}$ , где  $\text{Ad}$  — присоединенное представление группы  $G$  в ее алгебре Ли.
8. Докажите, что группа вещественных верхнетреугольных матриц размера  $N \times N$  с единицами на диагонали унимодулярна.
9. Группа  $G = SL(2, \mathbb{R})$  действует на верхней полуплоскости  $H_+ := \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}z > 0\}$  дробно-линейными преобразованиями

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Докажите, что на  $H_+$  существует  $G$ -инвариантная мера (она определена с точностью до постоянного множителя). Вычислите эту меру.

10. Та же задача для действия группы  $SU(1, 1)$  дробно-линейными преобразованиями на единичном круге  $|z| < 1$ . (Группа  $SU(1, 1)$  состоит из комплексных матриц размера  $2 \times 2$ , с определителем 1 и сохраняющих индефинитную эрмитову форму  $|z_1|^2 - |z_2|^2$  в  $\mathbb{C}^2$ .)

Замечание. В задачах 9 и 10 речь идет о двух моделях плоскости Лобачевского и соответственно о двух реализациях группы движений плоскости Лобачевского.