Привет матану!

Матанапоминалка. Фигура $B_\varepsilon(p) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \ \forall\, i\ |x_i - p_i| \leq \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$, называется *ε-кубом* с центром $p \in \mathbb{R}^n$. Точка p фигуры $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ называется *внутренней*, если $\exists \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(p) \subset \Phi$. Внутренние точки дополнения $\mathbb{R}^n \smallsetminus \Phi$ называются *внешними* для Φ. Точки p, не являющиеся ни внешними, ни внутренними для Φ, называются *граничными* или *собственными граничными*, смотря по тому, принадлежат ли они Φ. Внутренность и граница фигуры Φ обозначаются Φ° и $\partial\Phi$. Дополнение до внешности $\overline{\Phi} \overset{\text{def}}{=} \Phi^\circ \sqcup \partial\Phi$ называется *замыканием* фигуры Φ. Точка p называется *предельной* для Φ, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \Phi \cap \big(B_\varepsilon(p) \smallsetminus p\big) \neq \varnothing$. Фигура Φ называется *открытой* если все её точки — внутренние, и *замкнутой*, если она содержит все свои предельные точки.

Г8◇1. Покажите, что дополнение к открытой фигуре замкнуто, а к замкнутой — открыто, и что открытые фигуры образуют топологию[1].

Г8◇2. Покажите, что замыкание $\overline{\Phi}$ фигуры Φ представляет собою: **а)** дизъюнктное объединение Φ и множества всех её несобственных граничных точек **б)** объединение Φ и множества всех её предельных точек **в)** наименьшую по включению замкнутую фигуру, содержащую Φ.

Г8◇3. Покажите, что любая последовательность вложенных кубов $B_{\varepsilon_1}(p_1) \supset B_{\varepsilon_2}(p_2) \supset B_{\varepsilon_3}(p_3) \supset \dots$, у которой $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, имеет в $\mathbb{R}^n$ единственную общую точку.

Г8◇4 (компактность). Докажите эквивалентность следующих свойств фигуры $\Phi \subset \mathbb{R}^n$: **а)** Φ замкнута и содержится в некотором кубе **б)** Φ замкнута и покрывается конечным числом ε-кубов $\forall \varepsilon > 0$ **в)** любая последовательность $x : \mathbb{N} \to \Phi$ имеет в Φ предельную точку[2] **г)** в любом открытом покрытии Φ есть конечное подпокрытие **д)** любой набор замкнутых подмножеств в Φ имеет непустое пересечение, если все его конечные поднаборы имеют непустые пересечения.

Г8◇5 (выпуклость). Фигура $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклой*, если вместе с любым конечным набором точек $p_i \in \Phi$ она содержит все их *выпуклые комбинации* $\sum x_i p_i$, где все $x_i > 0$ и $\sum x_i = 1$. Покажите, что Φ выпукла , если и только если для любой пары точек $a, b \in \Phi$ отрезок $[a, b] \subset \Phi$.

Г8◇6. Приведите пример нормы[3] на $\mathbb{R}^n$, не происходящей из скалярного произведения.

Г8◇7. Проверьте, что пересечения, замыкания и внутренности выпуклых фигур выпуклы.

Г8◇8 (симплекс). Выпуклая оболочка не лежащих в $(n-1)$-мерной плоскости точек $p_0, p_1, \dots, p_n$ называется *n-мерным симплексом* и обозначается $[p_0 p_1 \dots p_n]$. Покажите, что он имеет непустую n-мерную внутренность, а его граница это объединение всевозможных симплексов $[p_{i_0} p_{i_1} \dots p_{i_k}]$ с $\varnothing \neq \{i_0, i_1, \dots, i_k\} \subsetneq \{0, 1, \dots, n\}$.

Г8◇9. У всякой ли замкнутой выпуклой фигуры Φ **а)** грань грани[4] является гранью Φ **б)** крайняя точка грани является крайней точкой Φ **в)** все вершины являются крайними точками **г)** все крайние точки являются вершинами?

Г8◇10. Покажите, что каждая замкнутая ограниченная выпуклая фигура является выпуклой оболочкой своих крайних точек.

Г8◇11 (лемма Радона). Любой конечный набор из $\geqslant (n+2)$ разных точек в $\mathbb{R}^n$ всегда разбивается на два непересекающихся поднабора с пересекающимися выпуклыми оболочками.

Г8◇12 (лемма Каратеодори). Каждая точка выпуклой оболочки произвольной фигуры в $\mathbb{R}^n$ является выпуклой комбинацией не более $(n+1)$ точек этой фигуры.

Г8◇13* (теорема Хелли). Если в наборе замкнутых выпуклых фигур в $\mathbb{R}^n$ имеется хоть одна компактная и каждый поднабор из $(n+1)$ фигур имеет непустое пересечение, то и весь набор имеет непустое пересечение.

---

[1] Т. е. их совокупность замкнута относительно конечных пересечений и любых объединений.

[2] Точка p называется предельной для *последовательности* (x_n), если к p сходится какая-нибудь её подпоследовательность (x_{n_k}). Предельные точки *последовательности* не следует путать с предельными точками *множества её значений.*

[3] Т. е. такой функции $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $v \mapsto \|v\|$, что $\forall\, u, v, w, \lambda\ \|u + w\| \leqslant \|u\| + \|w\|$, $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ и $\|v\| = 0 \iff v = 0$.

[4] *Гранью* фигуры Φ называется её пересечение с любой гиперплоскостью, относительно которой Φ лежит в одном замкнутом полупространстве. Нульмерные грани называются *вершинами.* Точка $p \in \Phi$ называется *крайней*, если она не является внутренней точкой никакого отрезка из Φ.

Персональный табель ______________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок 8 (26 октября)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2а			
б			
в			
3			
4а			
б			
в			
г			
д			
5			
6			
7			
8			
9а			
б			
в			
г			
10			
11			
12			
13			