Ортогональные преобразования.

Г7◇1. Чему равна композиция отражений $\sigma_{e_1}\sigma_{e_2}\,\dots\,\sigma_{e_n}$ евклидова координатного пространства $\mathbb{R}^n$ в стандартных координатных гиперплоскостях $e_i^{\perp}$ при $n = 2, 3, 4, \dots$?

Г7◇2 (движения евклидова пространства $\mathbb{R}^3$). Пусть τ_v, σ_π и $\varrho_{v,\varphi}$ обозначают, соответственно, сдвиг на вектор v, отражение в плоскости π и поворот вокруг прямой с направляющим вектором v на угол φ против ЧС, если глядеть вдоль v. Выясните, когда имеют место написанные ниже равенства, и во всех случаях, когда они верны, выразите параметры движения в правой части через параметры движений из левой: **а)** $\sigma_{\pi_1}\circ\sigma_{\pi_2} = \varrho_{v,\varphi}$ **б)** $\sigma_{\pi_1}\circ\sigma_{\pi_2} = \tau_v$ **в)** $\sigma_\pi\circ\varrho_{u,\varphi}\circ\sigma_\pi = \varrho_{v,\psi}$ **г)** $\varrho_{u,\varphi}\circ\varrho_{w,\psi} = \tau_v\circ\varrho_{v,\vartheta}$ **д)** $\varrho_{u,\varphi}\circ\sigma_\pi\circ\varrho_{u,-\varphi} = \sigma_{\pi_2}$ **е)** $\varrho_{u,\varphi}\circ\sigma_{\pi_1} = \sigma_{\pi_2}$ **ж)** $\tau_{u_2}\circ\sigma_{\pi_2}\circ\tau_{u_1}\circ\sigma_{\pi_1} = \tau_v\circ\varrho_{v,\varphi}$, где каждый из сдвигов u_i параллелен соответствующей плоскости отражения π_i, $i = 1, 2$.

Г7◇3. Верно ли, что в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ композиция поворота и сдвига всегда является винтовым движением[1] с тем же углом закрутки, что исходный поворот?

Г7◇4. Пусть $F\,:\,\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ — некоторое движение. В обозначениях зад. Г7◇2 опишите движения: **а)** $F\circ\tau_v\circ F^{-1}$ **б)** $F\circ\sigma_\pi\circ F^{-1}$ **в)** $F\circ\varrho_{v,\varphi}\circ F^{-1}$

Г7◇5. Обозначим через ϱ_{AB} поворот трёхмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ на 180° вокруг прямой AB, а через σ_{ABC} — отражение в плоскости ABC. Пусть точки A, B, C, D являются вершинами правильного тетраэдра. Опишите движение[2] **а)** $\varrho_{AD}\circ\varrho_{AC}\circ\varrho_{AB}$ **б)** $\sigma_{ADB}\circ\sigma_{ACD}\circ\sigma_{ABC}$.

Г7◇6 (группы трёхмерных многогранников). *Группой* (соотв. *собственной группой*) фигуры $\Phi\subset\mathbb{R}^n$ называется группа биективных преобразований $\Phi \xrightarrow{\sim} \Phi$, индуцированных всевозможными ортогональными (соотв. собственными ортогональными) преобразованиями $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Перечислите все движения в собственной и несобственной группах правильных **а)** куба **б)** октаэдра **в)** тетраэдра **г)** додекаэдра **д)** икосаэдра **е)** плоского n угольника в $\mathbb{R}^3$.

Г7◇7. Покажите, что группа $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ **а)** порождается поворотами на 180°, и все такие повороты сопряжены[3] друг другу **б*)** проста[4].

Г7◇8 (функция Лейбница). Даны взвешенные точки $p_1, p_2, \dots, p_m\in\mathbb{R}^n$ с весами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\in\mathbb{R}$. Пусть $m = \sum\mu_i \neq 0$, и c — центр тяжести данных точек. Покажите, что *функция Лейбница*

$$F\,:\,\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\sum_{i=1}^{m}\mu_i\cdot|xp_i|^2\,,$$

является аффинным отображением и $F(x) = F(c) + m\cdot|cx|^2$ для всех $x\in\mathbb{R}^n$.

Г7◇9. Даны две различные точки $p, q\in\mathbb{R}^n$ и число $d\in\mathbb{R}$. Опишите ГМТ $x\in\mathbb{R}^n$ с **а)** $|px|^2+|qx|^2 = d$ **б)** $|px|^2-|qx|^2 = d$ **в)** $|px|\,:\,|qx| = d$.

---

[1] т. е. композицией поворота со сдвигом на вектор, параллельный оси поворота

[2] если это отражение, то в какой плоскости, если поворот — вокруг какой оси и на какой угол

[3] два элемента g_1, g_2 группы G называются *сопряжёнными*, если $g_2 = hg_1h^{-1}$ для некоторого $h\in G$

[4] группа G называется *простой*, если в ней нет таких отличных от единицы и всей группы подгрупп $H\subset G$, что $ghg^{-1}\in H$ для всех $h\in H$ и $g\in G$

Персональный табель ______________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок 7 (19 октября)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
3			
4а			
б			
в			
5а			
б			
6а			
б			
в			
г			
д			
е			
7а			
б			
8			
9а			
б			
в			