Правильные многогранники (по Шлефли).

Терминология и обозначения. Многогранником в $\mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка конечного набора точек или, что то же самое, ограниченное пересечение конечного числа замкнутых полупространств[1]. Под размерностью многогранника понимается размерность наименьшего аффинного пространства, в котором он содержится. Группой многогранника M называется группа всех биективных отображений $M \xrightarrow{\sim} M$, индуцированных ортогональными преобразованиями $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Всякая последовательность длины n, состоящая из вершины, примыкающего к ней ребра, примыкающей к нему двумерной грани, ..., примыкающей к ней $(n-1)$-мерной грани, называется *флагом* в M. Многогранник называется *правильным*, если его группа транзитивно действует на его флагах. Для правильного многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\ell(P)$ длину его ребра, через $r(P)$ — радиус описанного шара, через $\varrho(P) = \ell^2/4r^2$ — квадрат отношения длины ребра к диаметру описанного шара.

Г7½◇1 (звезда). Покажите, что все вершины правильного многогранника P, соединённые ребром с заданной вершиной $p \in P$, лежат в одной гиперплоскости, образуя в ней правильный многогранник $\mathrm{St}(P)$, размерности на 1 меньше, чем P (он называется *звездой* многогранника P).

Г7½◇2 (символ). Определим *символ Шлефли* правильного многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ по индукции как последовательность из $(n-1)$ натуральных чисел $\boldsymbol{\nu}(P) = (\nu_1(P), \nu_2(P), \dots, \nu_{n-1}(P))$, в которой $\nu_1(P)$ это число рёбер у двумерной грани многогранника P, а $(\nu_2(P), \dots, \nu_{n-1}(P)) = \boldsymbol{\nu}\big(\mathrm{St}(P)\big)$ это символ звезды $\mathrm{St}(P)$ многогранника P. Найдите символы: **а)** додекаэдра и икосаэдра в $\mathbb{R}^3$ **б)** октаплекса в $\mathbb{R}^4$ **в)** правильного n-мерного симплекса **г)** n-мерного куба **д)** n-мерного кокуба.

Г7½◇3*. Убедитесь, что выпуклая оболочка вершин стандартного 4-мерного куба, вершин 4-мерного кокуба, гомотетичного стандартному с коэффициентом 2, и всех точек, которые можно получить всевозможными чётными перестановками координат из точек $(\pm\tau, \pm 1, \pm\tau^{-1}, 0)$, где $\tau = (1+\sqrt{5})/2$, является правильным многогранником с символом $(3,3,5)$.

Г7½◇4. Выразите $\ell(\mathrm{St}(P))$ через $\ell(P)$ и $\nu_1(P)$, и покажите, что

$$\varrho(P) = 1 - \frac{\cos^2\big(\pi/\nu_1(P)\big)}{\varrho\big(\mathrm{St}(P)\big)}$$

зависит только от символа $\boldsymbol{\nu}(P)$ многогранника P.

Г7½◇5* **(двойственность).** Покажите, что для правильного многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ с центром в нуле многогранник $P^* = \{\xi \in \mathbb{R}^{n*} \mid \forall\, v \in P\ \xi(v) \geqslant -1\}$ тоже правильный с центром в нуле, и для каждого k имеется оборачивающая включения биекция между k-мерными гранями[2] многогранника P и $(n-k-1)$-мерными гранями многогранника P^*.

Г7½◇6. Покажите, что символ $\boldsymbol{\nu}(P^*)$ это прочтённый справа налево символ $\boldsymbol{\nu}(P)$.

Г7½◇7 (классификация правильных многогранников по Шлефли). Покажите, что символы всех правильных многогранников $P \subset \mathbb{R}^n$ содержится в списке:

а) (ν), где $\nu \geqslant 3$ — любое натуральное для $n = 2$

б) $(3,3)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(3,5)$, $(5,3)$ для $n = 3$

в) $(3,3,3)$, $(3,3,4)$, $(4,3,3)$, $(3,4,3)$, $(3,3,5)$, $(5,3,3)$ для $n = 4$

г) $(3,\dots,3)$, $(3,\dots,3,4)$, $(4,3,\dots,3)$ для $n \geqslant 5$

и для каждого элемента списка имеется единственный с точностью до подобия правильный многогранник с таким символом.

Г7½◇8. Сколько движений в группах 4-мерных правильных многогранников с символами $(3,4,3)$, $(3,3,5)$ и $(5,3,3)$? Попытайтесь явно перечислить все эти движения.

---

[1] Эквивалентность этих двух определений известна как *теорема Минковского – Вейля*. Она будет в своё время доказана на лекции.

[2] Гранью многогоранника M называется непустое пересечение M с любой такой гиперплоскостью, что M целиком находится в одном из замкнутых полупространств, ею ограничиваемых.

Персональный табель ______________________________ . Листок 7½ (необязательный)
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2а			
б			
в			
г			
д			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
в			
г			
8			