Определители в геометрии.

Г6◇1. Векторы $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$, $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, направленные вдоль выходящих из вершины A рёбер параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ имеют матрицу Грама

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдите: **а)** расстояние и угол между прямыми CC_1 и B_1D_1 **б)** объём тетраэдра A_1C_1BD **в)** площадь треугольника B_1D_1C.

Г6◇2. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ найдите: **а)** угол и расстояние между прямой, лежащей в плоскости XOZ и задаваемой там уравнением $2x - 3z = 5$, и прямой, заданной уравнением $3y + 2z = 7$ в плоскости YOZ **б)** расстояние от точки $(-2, 1, -1)$ до плоскости, пересекающей координатные оси при $x = 3$, $y = 5$, $z = 2$ **в)** угол между плоскостью, параллельной оси OX и пересекающей координатную плоскость YOZ по прямой $z + 2y = 8$, и плоскостью, параллельной оси OZ и пересекающей координатную плоскость XOY по прямой $5y - x = 1$. **г)** объём правильного октаэдра, описанного около единичной сферы.

Г6◇3. Справедливы ли в евклидовом координатном пространстве $\mathbb{R}^3$ соотношения:
а) $[[a, b], [a, c]] = \det(a, b, c) \cdot a$ **б)** $[a, [b, c]] = [[a, b], c] + [b, [a, c]]$ **в)** $[a, [b, c]] = (b, a) \cdot c - (c, a) \cdot b$
г) $([u, v], [v, w]) = \det \begin{pmatrix} (u, v) & (u, w) \\ (v, v) & (v, w) \end{pmatrix}$

Г6◇4. Найдите объём правильного четырёхмерного симплекса, вписанного в шар радиуса 1.

Г6◇5. Найдите объём правильного четырёхмерного кокуба, описанного вокруг шара радиуса 1.

Г6◇6*. Найдите (четырёхмерный) объём октаплекса из задачи Г5◇12.

Г6◇7. Найдите минимум $\displaystyle\int_{-1}^{1} f^2(x)dx$ по всем многочленам f степени k со старшим коэффициентом 1 для **а)** $k = 2$ **б)** $k = 3$ **в*)** любого k.

Г6◇8. Покажите, что расстояние от конца вектора v до векторного подпространства, порождённого линейно независимыми векторами $w_1, w_2, \dots, w_k$, равно $\varGamma(v, w_1, w_2, \dots, w_k)/\varGamma(w_1, w_2, \dots, w_k)$, где через $\varGamma(u_1, u_2, \dots, u_m) \overset{\text{def}}{=} \det\big((u_i, u_j)\big)$ обозначен определитель Грама векторов $u_1, u_2, \dots, u_m$.

Г6◇9*. Для произвольных k точек $p_1, p_2, \dots, p_k$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ образуем симметричную $k \times k$ матрицу $D_{p_1, p_2, \dots, p_k} \overset{\text{def}}{=} \big(|p_ip_j|^2\big)$ квадратов расстояний между ними и обозначим через $C_{p_1, p_2, \dots, p_k}$ матрицу размера $(k+1) \times (k+1)$, получающуюся из матрицы $D_{p_1, p_2, \dots, p_k}$ приписыванием строки единиц сверху, столбца единиц слева и нуля в левом верхнем углу. Покажите, что **а)** $\varGamma\left(\overrightarrow{p_0p}_1, \overrightarrow{p_0p}_2, \cdots, \overrightarrow{p_0p}_n\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \det C_{p_0, p_1, \dots, p_n}$ (внимание: размер у матриц разный!)
б) $(n+1)$ точек $p_0, p_1, \dots, p_n$ лежат в одной гиперплоскости $\iff \det C_{p_0, p_1, \dots, p_n} = 0$
в) $(n+2)$ точки $p_0, p_1, \dots, p_{n+1}$ лежат на сфере или в гиперплоскости $\iff \det D_{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}} = 0$
г) квадрат радиуса шара, описанного около симплекса $[p_0, p_1, \dots, p_n]$, равен $-\frac{1}{2} \frac{\det D_{p_0, p_1, \dots, p_n}}{\det C_{p_0, p_1, \dots, p_n}}$.

Г6◇10*. Пусть задана симметричная матрица $D = \left(d_{ij}^2\right)$ размера $(n+1) \times (n+1)$, в которой все числа $d_{ii} = 0$, но числа $d_{ij} = d_{ji} > 0$ при $i \neq j$. Покажите, что симплекс $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ с предписанными длинами сторон $|p_ip_j| = d_{ij}$ существует, если и только если при каждом $r = 2, 3, \dots, (n+1)$ все главные миноры[1] порядка r в матрице D отличны от нуля и имеют знак $(-1)^{r-1}$.

[1]Т. е. определители квадратных подматриц, главная диагональ которых является подмножеством главной диагонали исходной матрицы.

Персональный табель ______________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок 6 (12 октября)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
2а			
б			
в			
г			
3а			
б			
в			
г			
4			
5			
6			
7а			
б			
в			
8			
9а			
б			
в			
г			
10			